CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

| | |
|---|---|
| *Rodzaj dokumentu:* | **Zasady oceniania rozwiązań zadań** |
| *Egzamin:* | **Egzamin maturalny** |
| *Przedmiot:* | **Matematyka** |
| *Poziom:* | **Poziom rozszerzony** |
| *Formy arkusza:* | EMAP-R0-100, EMAP-R0-200,<br>EMAP-R0-300, EMAP-R0-400,<br>EMAP-R0-600, EMAP-R0-700,<br>EMAP-R0-Q00, EMAP-R0-Z00,<br>EMAU-R0-100 |
| *Termin egzaminu:* | 12 maja 2023 r. |
| *Data publikacji dokumentu:* | 28 czerwca 2023 r. |

## ZADANIA ZAMKNIĘTE

### Zadanie 1. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1] | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>R11.1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
D

### Zadanie 2. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>R8.4) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
C

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1698).

## Zadanie 3. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>R7.1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

## Zadanie 4. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>R10.1) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
C

## ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

### Zadanie 5. (0–2)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>R3.5) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 8 | 5 |

## ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

**Uwagi ogólne:**

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie $n$ jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

### Zadanie 6. (0–3)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| V. Rozumowanie i argumentacja. | Zdający:<br>R2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj. przekształcenie nierówności $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ do postaci, z której można bezpośrednio wnioskować o równości liczb $x$ i $y$ (lub do postaci, z której można bezpośrednio wnioskować, że jedna z liczb: $x$, $y$, jest równa $2$) oraz obliczenie tych liczb: $x = 2$ oraz $y = 2$.

2 pkt – zastosowanie wzoru na sześcian różnicy oraz kwadrat różnicy, wykorzystanie założenia i zapisanie nierówności kwadratowej z jedną niewiadomą $x$ (lub $y$) w postaci $ax^2 + bx + c \geq 0$ lub $ax^2 + bx + c \leq 0$, np. $16x^2 - 64x + 64 \leq 0$

*ALBO*

– wykorzystanie założenia $x + y = 4$ i zapisanie nierówności w postaci $4(x - y)^2 \leq 0$ (lub $4(4 - 2y)^2 \leq 0$, lub $4(2x - 4)^2 \leq 0$),

*ALBO*

– przekształcenie nierówności do postaci $(x - y)^2 \cdot (x + y) \leq 0$ oraz poprawne określenie znaku jednego z czynników iloczynu $(x - y)^2 \cdot (x + y)$,

*ALBO*

– zastosowanie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną, zapisanie obu przypadków i przeprowadzenie poprawnego rozumowania dla jednego z tych przypadków.

1 pkt – wykorzystanie zależności $x + y = 4$ i zapisanie nierówności z jedną niewiadomą, np. $x^3 - x^2(4 - x) \leq x(4 - x)^2 - (4 - x)^3$

*ALBO*

– przekształcenie nierówności $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ do postaci $(x - y)(x^2 - y^2) \leq 0$,

*ALBO*

– przekształcenie nierówności $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ do postaci $x \cdot y \geq 4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeżeli zdający podstawia do związków $x + y = 4$ oraz $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ konkretne wartości liczbowe i na tym opiera swoją argumentację, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

<u>*Sposób I*</u>

Ponieważ $x + y = 4$, więc $y = 4 - x$. Ponieważ ponadto $x$ i $y$ spełniają nierówność $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$, więc otrzymujemy

$$x^3 - x^2(4 - x) \leq x(4 - x)^2 - (4 - x)^3$$

Stosujemy wzór na sześcian różnicy oraz kwadrat różnicy i otrzymujemy

$$x^3 - 4x^2 + x^3 \leq x(16 - 8x + x^2) - (64 - 48x + 12x^2 - x^3)$$

Przekształcamy nierówność i otrzymujemy kolejno

$$x^3 - 4x^2 + x^3 \leq 16x - 8x^2 + x^3 - 64 + 48x - 12x^2 + x^3$$

$$16x^2 - 64x + 64 \leq 0$$

$$(4x - 8)^2 \leq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc jedynym rozwiązaniem tej nierówności jest $x = 2$.

Ponieważ $y = 4 - x$, więc $y = 2$.
To należało wykazać.

*Sposób II*
Przekształcamy nierówność $x^3 - x^2y \le xy^2 - y^3$ kolejno do postaci

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 \le 0$$

$$(x - y)(x^2 - y^2) \le 0$$

$$(x + y)(x - y)^2 \le 0$$

Ponieważ $x + y = 4$, więc otrzymujemy

$$4(x - y)^2 \le 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc musi zachodzić

$$(x - y)^2 = 0$$

Stąd $x - y = 0$, czyli $x = y$. Zatem $2x = 4$, czyli $x = 2$. Ponieważ $y = 4 - x$, więc $y = 2$.
To należało wykazać.

## Zadanie 7. (0–3)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| V. Rozumowanie i argumentacja. | Zdający:<br>R7.4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

2 pkt – obliczenie długości odcinka $BN$: $\sqrt{3} - 1$

*ALBO*

– obliczenie długości odcinka $BD$: $|BD| = 2\sqrt{3}$ i zapisanie równania z jedną niewiadomą $x$ (długością odcinka $BN$),

*ALBO*

– zapisanie równania $\frac{x}{2\sqrt{3}-x} = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$ z niewiadomą $x = |DN|$ (otrzymanego z podobieństwa trójkątów $BLN$ i $DEN$, sposób VII),

*ALBO*

– obliczenie współrzędnych punktu $N$: $N = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$ i obliczenie długości odcinka $BD$: $|BD| = 2\sqrt{3}$ (sposób V),

*ALBO*

– obliczenie współrzędnych punktów $N$ i $D$: $N = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$ i $D = \left(\sqrt{3}, 3\right)$ (sposób V),

*ALBO*

– obliczenie współrzędnych punktu $N$: $N = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$ i zapisanie długości $|DN|$ w postaci $\frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+1} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + 4\right|}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2}}$ (sposób V).

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą $x = |BN|$, np.

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ (z sumy pól trójkątów $BLN$ oraz $KBN$),

$\frac{1}{\sin 105^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ}$ (z twierdzenia sinusów dla trójkąta $BNK$),

$\frac{1}{\sin 75^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ}$ (z twierdzenia sinusów dla trójkąta $BNL$),

$1 - \frac{1}{2} \cdot x = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{2}$ (ze związków miarowych w trójkątach $BEN$ i $ELN$),

*ALBO*

– obliczenie długości odcinka $BD$ i zapisanie $|BD| = 2\sqrt{3}$,

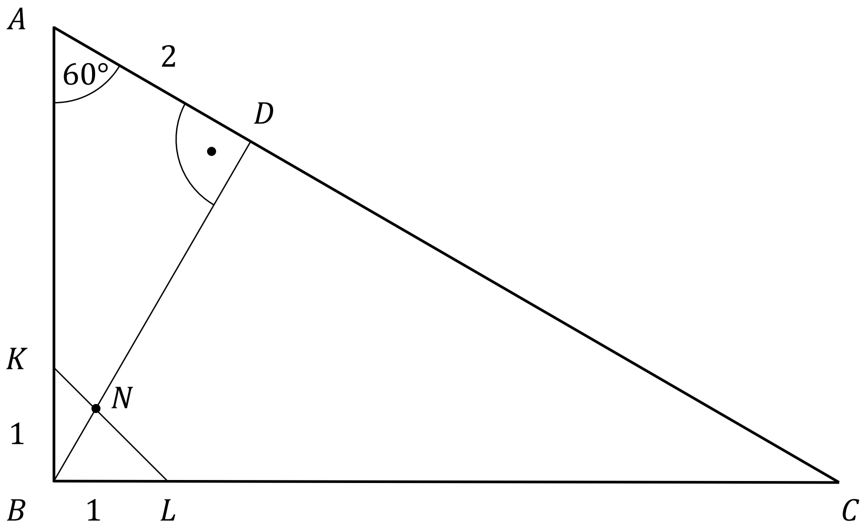
*ALBO*

– zapisanie równania z jedną niewiadomą $x$ (pierwszą lub drugą współrzędną punktu $N$), np. $-x+1=\sqrt{3}x$ (sposób V),
*ALBO*
– wyznaczenie równań prostych $AC$ i $BD$ oraz obliczenie współrzędnych punktu $D$: $D=\left(\sqrt{3},3\right)$ (sposób V).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano nieprawidłową metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**
W rozwiązaniach nie są akceptowane przybliżenia dziesiętne liczb rzeczywistych.

**Przykładowe pełne rozwiązania**
<u>*Sposób I (pola trójkątów)*</u>
W trójkącie $DAB$ o kątach $90°$, $60°$, $30°$ mamy: $|AD|=2$, $|AB|=4$ i $|BD|=2\sqrt{3}$.




W trójkącie $BLN$ miara kąta $NBL$ jest równa $60°$. W trójkącie $KBN$ miara kąta $KBN$ jest równa $30°$. Ponieważ pole trójkąta $KBL$ (równe $\frac{1}{2}$) jest sumą pól trójkątów $BLN$ oraz $KBN$, więc możemy zapisać równość

$$\frac{1}{2}\cdot|BL|\cdot|BN|\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\cdot|BN|\cdot|BK|\cdot\sin 30°=\frac{1}{2}$$

Stąd, po uwzględnieniu warunku $|BK|=|BL|=1$, otrzymujemy dalej

$$|BN|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+|BN|\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$|BN|\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)=2$$

$$|BN|=\sqrt{3}-1$$

Zatem $|ND|=|BD|-|BN|=2\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{3}+1$.
To należało wykazać.

Sposób II

W trójkącie $DAB$ o kątach $90°, 60°, 30°$ mamy: $|AD| = 2$, $|AB| = 4$ i $|BD| = 2\sqrt{3}$.
Kąty w trójkącie $BNK$ mają miary: $30°, 45°, 105°$. Stosujemy twierdzenie sinusów i zapisujemy równość:

$$\frac{|BK|}{\sin 105°} = \frac{|BN|}{\sin 45°}$$

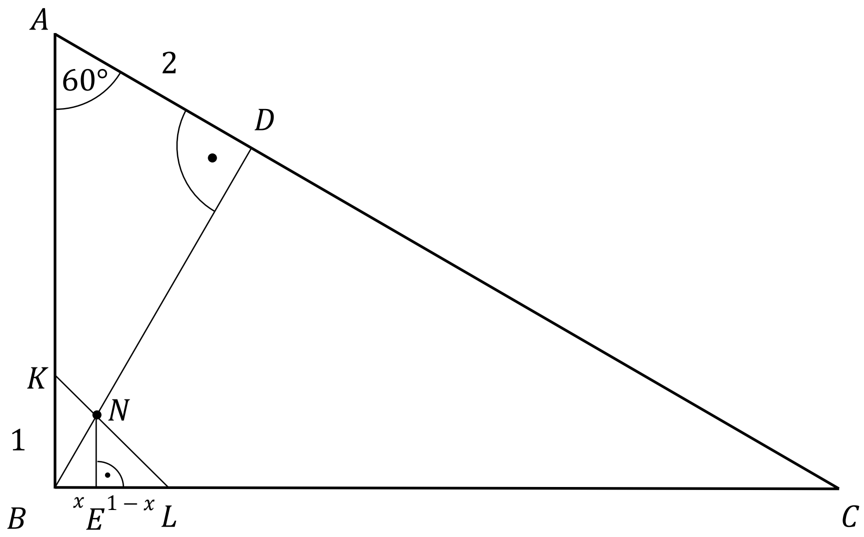
Zatem

$$|BN| = \frac{1 \cdot \sin 45°}{\sin(60° + 45°)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1$$

Ostatecznie $|ND| = |BD| - |BN| = 2\sqrt{3} - \left(\sqrt{3} - 1\right) = \sqrt{3} + 1$.
To należało wykazać.

Sposób III (trójkąt $BLN$)

Prowadzimy wysokość $NE$ w trójkącie $BLN$ i oznaczamy $x = |BE|$.




Trójkąt prostokątny $DAB$ ma kąty ostre $60°$ i $30°$, więc:

$$|AB| = 2|AD| = 2 \cdot 2 = 4 \quad \text{i} \quad |BD| = |AD|\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Trójkąt prostokątny $BLK$ ma kąty ostre $45°$, więc $|KL| = \sqrt{2}$.
W trójkącie prostokątnym $NBE$ kąty ostre mają miary $60°$ i $30°$, więc

$$|NE| = |BE| \cdot \sqrt{3} = x\sqrt{3} \quad \text{i} \quad |BN| = 2|BE| = 2x$$

Trójkąt prostokątny $ELN$ ma kąty ostre $45°$, więc

$$|NE| = |EL| = x\sqrt{3}$$

Ale $|NE| = |BL| - |BE| = 1 - x$, więc otrzymujemy równanie

$$1 - x = x\sqrt{3}$$

$$x\sqrt{3} + x = 1$$

$$(\sqrt{3} + 1)x = 1$$

Mnożąc obie strony równania przez $\sqrt{3} - 1$, otrzymujemy

$$2x = \sqrt{3} - 1$$

czyli

$$|BN| = 2x = \sqrt{3} - 1$$

Zatem $|ND| = |BD| - |BN| = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} + 1$.
To należało wykazać.

*<u>Sposób IV (twierdzenie cosinusów)</u>*

W trójkącie $DAB$ o kątach $90°, 60°, 30°$ mamy: $|AD| = 2, |AB| = 4$ i $|BD| = 2\sqrt{3}$.
W trójkącie $KBL$ kąty mają miary: $90°, 45°, 45°$ oraz: $|BK| = |BL| = 1, |KL| = \sqrt{2}$.
Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkątów $KBN$ oraz $BLN$ otrzymujemy równości

$$|BN|^2 = |BK|^2 + |KN|^2 - 2 \cdot |BK| \cdot |KN| \cdot \cos 45°$$

oraz

$$|BN|^2 = |BL|^2 + |LN|^2 - 2 \cdot |BL| \cdot |LN| \cdot \cos 45°$$

Zatem po podstawieniu $|BK| = |BL| = 1$ i dodaniu stronami równań otrzymujemy równość:

$$2 \cdot |BN|^2 = |LN|^2 + |KN|^2$$

Ponieważ $|\sphericalangle KBN| = 30°$, więc z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta $KBN$ otrzymujemy:

$$|KN|^2 = |BK|^2 + |BN|^2 - 2 \cdot |BK| \cdot |BN| \cdot \cos 30°$$

Ponieważ $|\sphericalangle NBL| = 60°$, więc z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta $BLN$ otrzymujemy:

$$|LN|^2 = |BL|^2 + |BN|^2 - 2 \cdot |BL| \cdot |BN| \cdot \cos 60°$$

Zatem po podstawieniu $|BK| = |BL| = 1$ i dodaniu stronami równań otrzymujemy równość:

$$|LN|^2 + |KN|^2 = 2 + 2 \cdot |BN|^2 - |BN| \cdot \sqrt{3} - |BN|$$

Ale

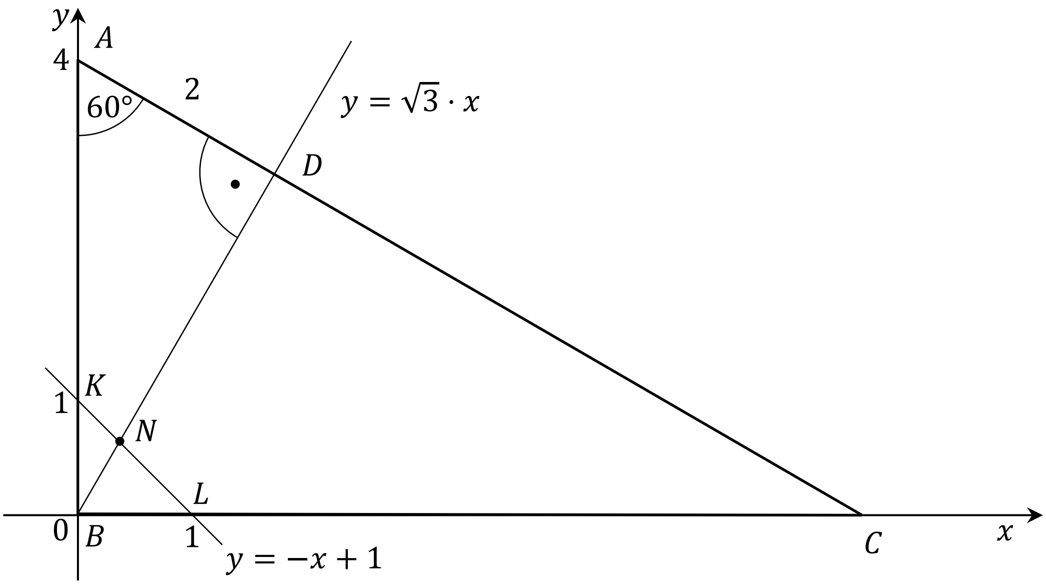
$$2 \cdot |BN|^2 = |LN|^2 + |KN|^2$$

więc

$$2 \cdot |BN|^2 = 2 + 2 \cdot |BN|^2 - |BN| \cdot \sqrt{3} - |BN|$$

Zatem $|BN| \cdot \left(\sqrt{3}+1\right) = 2$, czyli $|BN| = \sqrt{3}-1$. Dlatego
$|ND| = |BD| - |BN| = 2\sqrt{3} - \left(\sqrt{3}-1\right) = \sqrt{3}+1$.
To należało wykazać.

_Sposób V (trójkąt w układzie współrzędnych)_
Umieszczamy trójkąt $ABC$ w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ tak, aby: $B = (0, 0)$, $A$ był punktem leżącym na dodatniej półosi $Oy$, $C$ był punktem leżącym na dodatniej półosi $Ox$. Wtedy $K = (0, 1)$ i $L = (1, 0)$, więc prosta $KL$ ma równanie $y = -x + 1$. Ponieważ $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$ i $BD \perp AC$, więc prosta $BD$ jest nachylona do osi $Ox$ pod kątem $60^\circ$. Stąd $BD$ ma równanie $y = \sqrt{3}x$.




Obliczamy współrzędne punktu $N$:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = \sqrt{3}\,x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}x = -x + 1 \\ y = \sqrt{3}\,x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \end{cases}$$

czyli $N = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$.
Obliczamy współrzędne punktu $A$.
$\frac{|AD|}{|AB|} = \cos 60^\circ$, więc $|AB| = \frac{|AD|}{\cos 60^\circ} = 4$ i stąd $A = (0, 4)$.

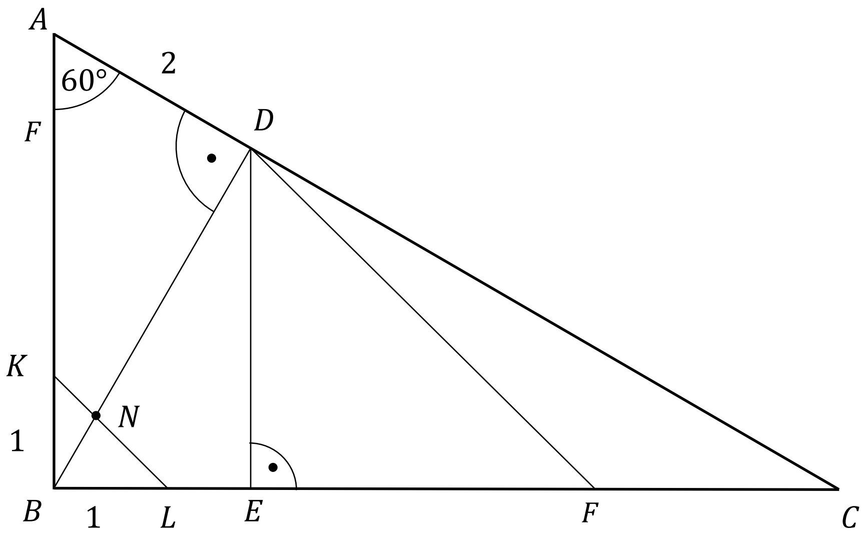
Ponieważ $|\sphericalangle BCA| = 30°$, więc współczynnik kierunkowy $a$ w równaniu prostej $AC$ jest równy $a = \operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Zatem prosta $AC$ ma równanie $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$.
Obliczamy odległość punktu $N$ od prostej $AC$:

$$\frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+1}-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}+4\right|}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(-1)^2}} = \frac{\left|\frac{-\sqrt{3}-3\sqrt{3}+12(\sqrt{3}+1)}{3(\sqrt{3}+1)}\right|}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{8\sqrt{3}+12}{3(\sqrt{3}+1)}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}+12}{3(\sqrt{3}+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = \sqrt{3}+1$$

Zatem $|ND| = \sqrt{3}+1$. To należało wykazać.

<u>*Sposób VI (prosta równoległa do $KL$ przechodząca przez $D$)*</u>
Prowadzimy wysokość $DE$ trójkąta $BCD$, a przez punkt $D$ prostą równoległą do prostej $KL$ i oznaczamy przez $F$ punkt jej przecięcia z prostą $BC$.




W trójkącie $DAB$ o kątach $90°, 60°, 30°$ mamy: $|AD| = 2$, $|AB| = 4$ i $|BD| = 2\sqrt{3}$.
Trójkąt prostokątny $BED$ ma również kąty ostre $60°$ i $30°$, więc $|BE| = \frac{|BD|}{2} = \sqrt{3}$ i $|DE| = |BD|\sqrt{3} = 3$.
Trójkąt prostokątny $DEF$ ma kąty ostre $45°$, więc jest równoramienny.
Zatem $|EF| = |DE| = 3$.
Stąd $|LF| = |LE| + |EF| = (|BE| - |BL|) + |EF| = \sqrt{3} - 1 + 3 = 2 + \sqrt{3}$.
Z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{|ND|}{|LF|} = \frac{|BN|}{|BL|}$$

czyli

$$\frac{|ND|}{2+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-|ND|}{1}$$

Stąd

$$|ND| = \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}-|ND|\right)$$

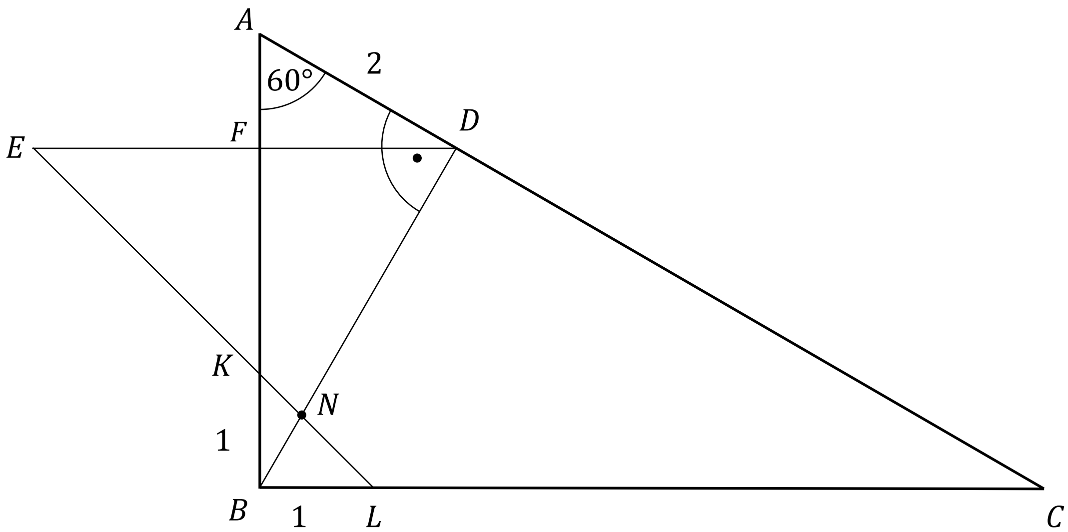
$$|ND| + \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot|ND| = 4\sqrt{3}+6$$

$$|ND|\cdot\left(3+\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}+6$$

$$|ND| = \frac{4\sqrt{3}+6}{3+\sqrt{3}} = \frac{2(2\sqrt{3}+3)(3-\sqrt{3})}{9-3} = \sqrt{3}+1$$

To należało wykazać.

*<u>Sposób VII (prosta równoległa do $BC$ przechodząca przez $D$)</u>*
Prowadzimy przez punkt $D$ prostą równoległą do prostej $BC$ i oznaczamy przez $E$ punkt jej przecięcia z prostą $KL$, natomiast przez $F$ – punkt jej przecięcia z prostą $AB$.




W trójkącie $DAB$ o kątach $90°, 60°, 30°$ mamy: $|AD| = 2$, $|AB| = 4$ i $|BD| = 2\sqrt{3}$.
Trójkąt prostokątny $AFD$ ma kąty ostre $60°$ i $30°$, więc $|AF| = 1$ oraz $|DF| = \sqrt{3}$.
Zatem $|FK| = 4 - 1 - 1 = 2$.
Trójkąt prostokątny $KFE$ ma kąty ostre $45°$, więc jest równoramienny.
Zatem $|EF| = |FK| = 2$. Stąd $|ED| = 2+\sqrt{3}$.
Trójkąty $DEN$ i $BLN$ są podobne (*kkk*), więc

$$\frac{|ND|}{|ED|} = \frac{|BN|}{|BL|}$$

czyli

$$\frac{|ND|}{2+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - |ND|}{1}$$

Stąd

$$|ND| = \left(2+\sqrt{3}\right) \cdot (2\sqrt{3} - |ND|)$$

$$|ND| + \left(2+\sqrt{3}\right) \cdot |ND| = 4\sqrt{3} + 6$$

$$|ND| \cdot \left(3+\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} + 6$$

$$|ND| = \frac{4\sqrt{3}+6}{3+\sqrt{3}} = \frac{2(2\sqrt{3}+3)(3-\sqrt{3})}{9-3} = \sqrt{3} + 1$$

To należało wykazać.

## Zadanie 8. (0–3)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>R10.3) korzysta z twierdzenia<br>o prawdopodobieństwie całkowitym. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa i poprawny wynik: $\frac{2}{7}$.

2 pkt – zapisanie/obliczenie prawdopodobieństwa zdarzeń $B_1, B_2, B_3$ oraz prawdopodobieństw warunkowych $P(A|B_1), P(A|B_2), P(A|B_3)$:

$P(B_1) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}}$ i $P(B_2) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}}$ ,i $P(B_3) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}}$ ,i $P(A|B_1) = \frac{2}{5}$ ,i $P(A|B_2) = \frac{1}{5}$ ,

i $P(A|B_3) = 0$

*ALBO*

– zapisanie prawdopodobieństw na wszystkich odcinkach istotnych gałęzi drzewa,

*ALBO*

– zapisanie/obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$, przy zastosowaniu klasycznej definicji prawdopodobieństwa: $|\Omega| = 7\cdot 6\cdot 5$ oraz $|A| = 5\cdot 4\cdot 2 + 5\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 5\cdot 1$ (lub $|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 60$).

1 pkt – opisanie zdarzeń losowych $B_1, B_2, B_3$ i obliczenie ich prawdopodobieństw:

$P(B_1) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}}$, $P(B_2) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}}$, $P(B_3) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}}$

*ALBO*

– narysowanie drzewa stochastycznego doświadczenia i zapisanie prawdopodobieństw na gałęziach drzewa I etapu doświadczenia (dla drzewa dwuetapowego) lub I i II etapu (dla drzewa trzyetapowego),

*ALBO*

– obliczenie prawdopodobieństw wylosowania kuli czarnej na ostatnim etapie oraz właściwe zinterpretowanie wcześniejszych etapów doświadczenia: $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$,

*ALBO*

– zapisanie/obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych lub liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$, przy zastosowaniu klasycznej definicji prawdopodobieństwa: $|\Omega| = 7\cdot 6\cdot 5$ lub $|A| = 5\cdot 4\cdot 2 + 5\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 5\cdot 1$ (lub $|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 60$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano nieprawidłową metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**
**1.** Jeżeli zdający, stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, pominie składnik $P(B_3) \cdot P(A|B_3)$, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.
**2.** Jeżeli zdający zapisze jedynie $P(A) = \frac{2}{7}$, to otrzymuje **1 punkt**.
**3.** Jeżeli zdający zapisze $P(A) = \frac{2}{7}$ i zapisze poprawny komentarz uzasadniający otrzymany wynik, to otrzymuje **3 punkty**.

**Przykładowe pełne rozwiązania**
*Sposób I (prawdopodobieństwo całkowite)*
Wprowadzamy następujące oznaczenia:
$A$ – zdarzenie polegające na tym, że w drugim losowaniu wylosowano kulę czarną,
$B_1$ – zdarzenie polegające na tym, że w pierwszym losowaniu wylosowano dwie kule białe,
$B_2$ – zdarzenie polegające na tym, że w pierwszym losowaniu wylosowano kulę białą i kulę czarną,
$B_3$ – zdarzenie polegające na tym, że w pierwszym losowaniu wylosowano dwie kule czarne.

Obliczamy prawdopodobieństwa zdarzeń $B_1, B_2, B_3$ :

$$P(B_1) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{10}{21} \qquad P(B_2) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{10}{21} \qquad P(B_3) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{21}$$

Obliczamy prawdopodobieństwa warunkowe $P(A|B_1), P(A|B_2), P(A|B_3)$:

$$P(A|B_1) = P(A \cap B_1) : P(B_1) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{1}} : \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$P(A|B_2) = \frac{1}{5} \qquad P(A|B_3) = 0$$

Stosujemy twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym i obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $A$:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) =$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{21} + \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{21} + 0 \cdot \frac{1}{21} = \frac{2}{7}$$

*Sposób II (model klasyczny)*
Niech $K$ będzie zbiorem siedmiu kul, które znajdowały się w pojemniku. Przyjmijmy, że zdarzeniem elementarnym jest każdy ciąg $(x, y, z)$, którego wyrazami są trzy kule: $x, y, z \in K$, parami różne. Zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne (jest to model klasyczny).
Wtedy

$$|\Omega| = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

gdzie $|\Omega|$ oznacza liczbę elementów zbioru $\Omega$ (zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych).

Niech $A$ będzie zdarzeniem polegającym na tym, że trzecia z wylosowanych kul $(z)$ będzie czarna.
Zdarzenie $A$ jest sumą parami rozłącznych zdarzeń:
$A_1$ – dwie wylosowane kule ($x$ oraz $y$) będą białe, a trzecia kula $(z)$ będzie czarna,
$A_2$ – pierwsza kula $(x)$ będzie biała, a następne dwie ($y$ oraz $z$) będą czarne,
$A_3$ – pierwsza kula $(x)$ będzie czarna, druga $(y)$ będzie biała, a trzecia kula $(z)$ będzie czarna.
Ponieważ

$$|A_1| = 5 \cdot 4 \cdot 2 = 40, \quad |A_2| = 5 \cdot 2 \cdot 1 = 10, \quad |A_3| = 2 \cdot 5 \cdot 1 = 10$$

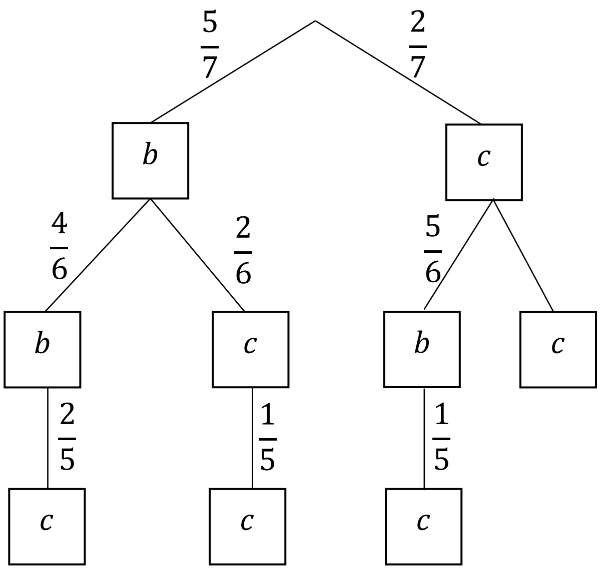
więc

$$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 60$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$$

<u>*Sposób III (drzewo stochastyczne – 3 etapy)*</u>
Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi. Symbol „$b$” odpowiada wylosowaniu kuli białej, symbol „$c$” – kuli czarnej. Po wylosowaniu dwóch kul czarnych nie możemy już wylosować kuli czarnej.
Oznaczamy przez $A$ zdarzenie polegające na tym, że trzecia z wylosowanych kul jest czarna.

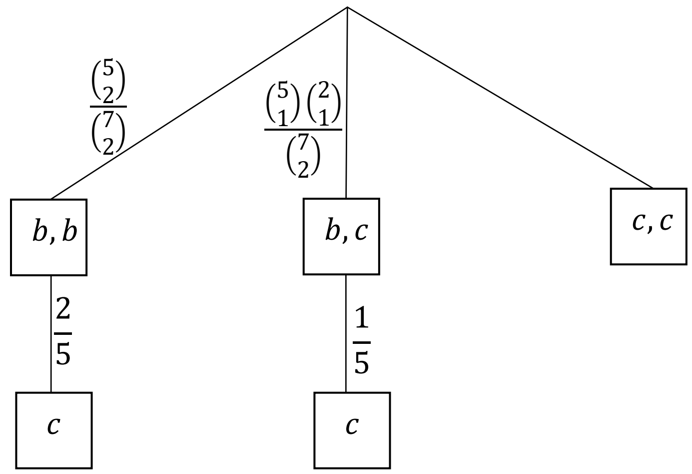



Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest równe

$$P(A) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{7}$$

*Sposób III (drzewo stochastyczne – 2 etapy)*

Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi. Symbol „$b$” odpowiada kuli białej, symbol „$c$” – kuli czarnej.
Po wylosowaniu dwóch kul czarnych nie możemy już wylosować kuli czarnej.
Oznaczamy przez $A$ zdarzenie polegające na tym, że kula wylosowana w drugim losowaniu jest czarna.




Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest równe

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} \cdot \frac{2}{5} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{7}$$

## Zadanie 9. (0–3)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymagania szczegółowe** |
| V. Rozumowanie i argumentacja. | Zdający:<br>R11.2) oblicza pochodne funkcji wymiernych;<br>R11.3) korzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x_0 = -3$ oraz $y = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$ (lub $y = -\frac{8}{11}(x+3) + 3$).

2 pkt – obliczenie odciętej punktu $P$ i wyznaczenie pochodnej funkcji $f$: $x_0 = -3$ oraz $f'(x) = \frac{(6x-2)\cdot(x^2+2x+8)-(3x^2-2x)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+8)^2}$.

1 pkt – obliczenie odciętej punktu $P$: $x_0 = -3$

*ALBO*

– wyznaczenie pochodnej funkcji $f$: $f'(x) = \frac{(6x-2)\cdot(x^2+2x+8)-(3x^2-2x)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+8)^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeżeli zdający błędnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Obliczamy odciętą $x_0$ punktu $P$:

$$3 = \frac{3x_0^2 - 2x_0}{x_0^2 + 2x_0 + 8}$$

$$3{x_0}^2 + 6x_0 + 24 = 3{x_0}^2 - 2x_0$$

$$x_0 = -3$$

Wyznaczamy pochodną funkcji $f$:

$$f'(x) = \frac{(6x-2)(x^2+2x+8) - (3x^2-2x)(2x+2)}{(x^2+2x+8)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^2 + 48x - 16}{(x^2+2x+8)^2}$$

Wyznaczamy równanie kierunkowe $y = ax + b$ stycznej do wykresu funkcji $f$ w punkcie $P$. Obliczamy współczynnik kierunkowy $a$ w równaniu stycznej:

$$a = f'(-3) = -\frac{8}{11}$$

Obliczamy współczynnik $b$ w równaniu stycznej:

$$3 = -\frac{8}{11} \cdot (-3) + b$$

$$b = \frac{9}{11}$$

Styczna ma równanie $y = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$ .

## Zadanie 10. (0–4)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>R3.8) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż:<br>$\left\|\|x+1\|-2\right\|=3,\ \|x+3\|+\|x-5\|>12$. |

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

3 pkt – rozwiązanie nierówności w dwóch spośród rozważanych przedziałów/przypadków (o ile rozpatruje nierówność w przedziałach/przypadkach, których suma jest równa $\mathbb{R}$/wyczerpujących zbiór $\mathbb{R}$)

*ALBO*

– zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności: $x+2<\frac{25}{3}-|x-3|$ i $x+2>-\left(\frac{25}{3}-|x-3|\right)$, a następnie w postaci równoważnej koniunkcji nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej: $x-3<\frac{19}{3}-x$ i $x-3>-\left(\frac{19}{3}-x\right)$ i $x-3<x+\frac{31}{3}$ i $x-3>-\left(x+\frac{31}{3}\right)$,

*ALBO*

– odczytanie z wykresów funkcji $f$ oraz $g$ pierwszych współrzędnych punktów ich przecięcia: $x=-\frac{11}{3}$ oraz $x=\frac{14}{3}$ i sprawdzenie rachunkiem poprawności odczytanych współrzędnych.

2 pkt – zastosowanie definicji wartości bezwzględnej lub własności wartości bezwzględnej i zapisanie danej nierówności odpowiednio w trzech przedziałach: $(-\infty,-2)$, $\langle -2,3)$, $\langle 3,+\infty)$, lub w czterech przypadkach: $x+2<0$ i $x-3<0$, $x+2<0$ i $x-3\geq 0$, $x+2\geq 0$ i $x-3<0$, $x+2\geq 0$ i $x-3\geq 0$ (z dokładnością do domknięcia)

*ALBO*

– zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności: $x+2<\frac{25}{3}-|x-3|$ i $x+2>-\left(\frac{25}{3}-|x-3|\right)$,

*ALBO*

– narysowanie wykresów funkcji $f(x)=|x+2|$ oraz $g(x)=\frac{25}{3}-|x-3|$.

1 pkt – przekształcenie danej nierówności do postaci $|x+2|<\frac{25}{3}-|x-3|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeśli w rozwiązaniu algebraicznym zdający popełni błąd przy zapisie nierówności tylko w jednym z rozpatrywanych przypadków, ale konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**2.** Jeśli w rozwiązaniu graficznym zdający popełni jeden błąd przy rysowaniu wykresu funkcji $f(x) = |x+2|$ albo $g(x) = \frac{25}{3} - |x-3|$, ale otrzyma dwa punkty przecięcia i dalej konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za zapisanie wyrażeń w postaci $|x+2|$ oraz $|x-3|$ oraz konsekwentną interpretację zbioru rozwiązań).

**3.** Jeżeli zdający przy rozwiązaniu graficznym poda zbiór rozwiązań $x \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$, ale nie sprawdzi rachunkiem pierwszych współrzędnych punktów przecięcia wykresów funkcji $f$ i $g$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

<u>*Sposób I*</u>

Zauważamy, że $\sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ oraz $\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$.

Zapisujemy nierówność $\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$ w równoważnej postaci $|x+2| < \frac{25}{3} - |x-3|$.

Rozważamy trzy przypadki.

Przypadek 1. (gdy $x \in (-\infty, -2)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $-x-2 < \frac{25}{3} + x - 3$, czyli $x > -\frac{11}{3}$.

Stąd otrzymujemy $x \in \left(-\frac{11}{3}, -2\right)$.

Przypadek 2. (gdy $x \in \langle -2, 3)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $x+2 < \frac{25}{3} + x - 3$. Otrzymujemy prawdziwą nierówność $5 < \frac{25}{3}$, więc $x \in \langle -2, 3)$.

Przypadek 3. (gdy $x \in \langle 3, +\infty)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $x+2 < \frac{25}{3} - x + 3$, czyli $x < \frac{14}{3}$. Stąd otrzymujemy $x \in \left\langle 3, \frac{14}{3}\right)$.

Ostatecznie rozwiązaniami danej nierówności są wszystkie liczby ze zbioru $\left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

<u>*Sposób II (poprzez koniunkcję nierówności)*</u>

Zauważamy, że $\sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ oraz $\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$.

Zapisujemy nierówność $\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$ w równoważnej postaci $|x+2| < \frac{25}{3} - |x-3|$.

Dla każdej liczby rzeczywistej $x$ i dla każdej liczby rzeczywistej $a$ prawdziwa jest równoważność: $|x| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < a$ i $x > -a$.

Przekształcamy nierówność $|x+2| < \frac{25}{3} - |x-3|$, korzystając z tej równoważności dwukrotnie:

$$x + 2 < \frac{25}{3} - |x-3| \quad \text{i} \quad x + 2 > -\left(\frac{25}{3} - |x-3|\right)$$

$$|x-3| < \frac{19}{3} - x \quad \text{i} \quad |x-3| < x + \frac{31}{3}$$

$$x - 3 < \frac{19}{3} - x \quad \text{i} \quad x - 3 > -\left(\frac{19}{3} - x\right) \quad \text{i} \quad x - 3 < x + \frac{31}{3} \quad \text{i} \quad x - 3 > -\left(x + \frac{31}{3}\right)$$

$$2x < \frac{28}{3} \quad \text{i} \quad -3 > -\frac{19}{3} \quad \text{i} \quad -3 < \frac{31}{3} \quad \text{i} \quad 2x > -\frac{22}{3}$$

$$x < \frac{14}{3} \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad x > -\frac{11}{3}$$

$$-\frac{11}{3} < x < \frac{14}{3}$$

Ostatecznie rozwiązaniami danej nierówności są wszystkie liczby ze zbioru $\left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

## Zadanie 11. (0–4)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>R5.2) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy. |

### Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $L = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}}$

(lub $L = \frac{8\cdot\left(4+\sqrt{10}\right)a}{3}$ ).

3 pkt – zapisanie: $L = 4a\left(1 + \frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{5}{8} + \ ...\right)$.

2 pkt – obliczenie ilorazu ciągu: $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$ .

1 pkt – obliczenie długości boku drugiego kwadratu: $a_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}a$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający obliczy tylko sumę długości boków (po jednym z każdego kwadratu), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**2.** Jeżeli zdający błędnie ustala stosunek podziału długości boku kwadratu i rozwiązuje zadanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za obliczenie ilorazu $q$ ciągu, o ile $q \in (0,1)$, oraz za konsekwentne obliczenie sumy obwodów wszystkich kwadratów).

**3.** Jeżeli zdający przyjmuje do obliczeń konkretną długość boku kwadratu $K_1$ i rozwiązuje zadanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**4.** Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i otrzyma iloraz $q$ ciągu, który jest liczbą spoza przedziału $(0,1)$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie (za poprawne obliczenie $a_2$).

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez $a_i$ długość boku kwadratu $K_i$ , natomiast przez $L_i$ – obwód kwadratu $K_i$ (dla $i = 1,2,3,...$). Niech $L$ oznacza sumę obwodów wszystkich rozważanych kwadratów.
Obliczamy długości boków kolejnych kwadratów:

$$a_1 = a$$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$$

Analogicznie

$$a_3 = \frac{\sqrt{10}}{4}a_2 = \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}a = \frac{5}{8}a$$

$$a_4 = \frac{5\sqrt{10}}{32}a$$

i tak dalej.
Stąd

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \ ... = 4a + 4 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}a + 4 \cdot \frac{5}{8}a + \ ... = 4a\left(1 + \frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{5}{8} + \ ...\right)$$

Zauważamy, że wyrażenie w nawiasie jest sumą szeregu geometrycznego, gdzie $a_1 = 1$ i $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Ponieważ $|q| = \frac{\sqrt{10}}{4} < 1$, zatem spełnione są założenia twierdzenia o istnieniu sumy nieskończonego szeregu geometrycznego.

Zatem $L = 4a \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{8\cdot(4+\sqrt{10})a}{3}$.

## Zadanie 12. (0–4)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymagania szczegółowe** |
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>R6.5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów;<br>R6.6) rozwiązuje równania trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$. |

### Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i poprawny wynik: $\pi$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $2\pi$.

3 pkt – przekształcenie równania $3\sin^2 x - \sin^2 2x = 0$ do alternatywy równań trygonometrycznych i rozwiązanie dwóch z otrzymanych równań w zbiorze $\mathbb{R}$ lub jednego z nich w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$.

2 pkt – zapisanie alternatywy równań: $\sin^2 x = 0$ lub $3 - 4\cos^2 x = 0$

*ALBO*

– zapisanie alternatywy równań: $\sin^2 x = 0$ lub $4\sin^2 x - 1 = 0$,

*ALBO*

– zapisanie alternatywy równań:

$$\sqrt{3}\sin x - 2\sin x \cos x = 0 \text{ lub } \sqrt{3}\,\sin x + 2\sin x \cos x = 0,$$

*ALBO*

– zapisanie i rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą $t = \cos^2 x$ (np. $4t^2 - 7t + 3 = 0$ i $t = 1$ oraz $t = \frac{3}{4}$),

*ALBO*

– zapisanie i rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą $t = \sin^2 x$ (np. $4t^2 - t = 0$ i $t = 0$ oraz $t = \frac{1}{4}$),

*ALBO*

– zapisanie alternatywy równań: $|\sin x| = 0$ lub $\sqrt{3} - 2|\cos x| = 0$.

1 pkt – przekształcenie równania $3\sin^2 x - \sin^2 2x = 0$ do jednej z poniższych postaci:

$\sin^2 x\,(3 - 4\cos^2 x) = 0$

lub $\sin^2 x\,(4\sin^2 x - 1) = 0$,

lub $4\cos^4 x - 7\cos^2 x + 3 = 0$,

lub $4\sin^4 x - \sin^2 x = 0$,

lub $\left(\sqrt{3}\sin x - \sin 2x\right)\left(\sqrt{3}\sin x + \sin 2x\right) = 0$,

lub $\left|\sqrt{3}\sin x\right| = |\sin 2x|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano nieprawidłową metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

– podzielenie obu stron równania przez $\sin x$ (bez stosownego założenia)

– zastosowania niepoprawnej zależności $\sqrt{a^2} = a$

– zastosowania niepoprawnej zależności $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$

i zdający konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (o ile nie nabył praw do innej punktacji).

**2.** Jeżeli zdający, przekształcając lewą stronę równania, zapisze ją w postaci $\sin x \cdot (3 - 4\cos^2 x)$ lub $\sin x \cdot (\sqrt{3} - 2\cos x)(\sqrt{3} + 2\cos x)$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

*<u>Sposób I</u>*

Przekształcamy równanie równoważnie, korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta, i otrzymujemy:

$$3\sin^2 x - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x\,(3 - 4\cos^2 x) = 0$$

$$\sin^2 x = 0 \quad \text{lub} \quad 3 - 4\cos^2 x = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{lub} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Równanie $\sin x = 0$ ma w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$ dwa rozwiązania: $\pi$ oraz $2\pi$.

Równanie $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ma w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$ jedno rozwiązanie: $\frac{11\pi}{6}$.

Równanie $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ma w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$ jedno rozwiązanie: $\frac{7\pi}{6}$.

Zatem równanie $3\sin^2 x - \sin^2 2x = 0$ ma w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$ cztery rozwiązania: $\pi$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $2\pi$.

*<u>Sposób II</u>*

Przekształcamy równanie równoważnie, korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta, i otrzymujemy:

$$3\sin^2 x = \sin^2 2x$$

$$\sqrt{3}|\sin x| = |\sin 2x|$$

$$\sqrt{3} \cdot |\sin x| = 2 \cdot |\sin x| \cdot |\cos x|$$

$$|\sin x| \cdot \left(\sqrt{3} - 2|\cos x|\right) = 0$$

$$|\sin x| = 0 \quad \text{lub} \quad \sqrt{3} - 2|\cos x| = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad |\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Równanie $\sin x = 0$ ma w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$ dwa rozwiązania: $\pi$ oraz $2\pi$.
Równanie $|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ma w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$ dwa rozwiązania: $\frac{7\pi}{6}$ oraz $\frac{11\pi}{6}$.
Zatem równanie $3\sin^2 x - \sin^2 2x = 0$ ma w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$ cztery rozwiązania: $\pi,\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6},\ 2\pi$.

## Zadanie 13. (0–4)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>R7.1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu. |

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $16\sqrt{3}+10$.

3 pkt – obliczenie długości boku $AB$: $|AB|=8\sqrt{3}$ i zapisanie $Ob_{ABCD}=2\cdot(|AB|+|CD|)$

*ALBO*

– obliczenie długości boku $AB$: $|AB|=8\sqrt{3}$ i zapisanie równania $8\sqrt{3}+5=4+|AD|$.

2 pkt – obliczenie długości boku $AB$: $8\sqrt{3}$

*ALBO*

– zapisanie równości 1) i 3) określonych w kryterium oceniania za 1 punkt,

*ALBO*

– zapisanie równości 2) i 3) określonych w kryterium oceniania za 1 punkt,

*ALBO*

– zapisanie równości 1) i 4) określonych w kryterium oceniania za 1 punkt.

1 pkt – zapisanie jednej z poniższych równości 1)- 4):

1) $\frac{|AB|}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\frac{1}{4}}$ lub $\frac{1}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{|AB|}$,

2) $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot |AC|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|AB|\cdot\frac{1}{4}$,

3) $Ob_{ABCD}=2\cdot(|AB|+|CD|)$,

4) $|AB|+5=4+|AD|$

*ALBO*

– zapisanie równania z jedną niewiadomą $x$ (długością boku $AB$), np.

$$x^2=16+\left(2+\frac{x\sqrt{15}}{4}\right)^2-4\left(2+\frac{x\sqrt{15}}{4}\right),$$

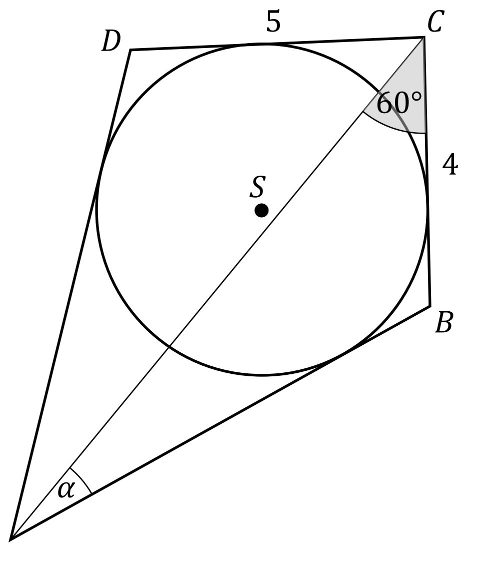
$$16=\left(2+\frac{\sqrt{15}}{4}x\right)^2+x^2-\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot\left(2+\frac{\sqrt{15}}{4}x\right)x$$

(z twierdzenia cosinusów dla trójkąta $ABC$ i dwóch kątów tego trójkąta).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

<u>*Sposób I*</u>




Oznaczmy $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Zgodnie z warunkami zadania $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

Obliczamy długość $a$ boku $AB$. Korzystamy z twierdzenia sinusów w trójkącie $ABC$ i otrzymujemy

$$\frac{|AB|}{\sin 60^\circ} = \frac{|BC|}{\sin\alpha}$$

$$\frac{|AB|}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{4}}$$

Stąd $|AB| = 8\sqrt{3}$.

Ponieważ w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, więc prawdziwa jest zależność

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$$

Zatem obwód $Ob_{ABCD}$ czworokąta jest równy

$$Ob_{ABCD} = 2\cdot(|AB| + |CD|) = 16\sqrt{3} + 10$$

<u>*Sposób II*</u>

Zauważmy, że pole trójkąta $ABC$ można obliczyć na dwa sposoby:

$$P = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AC|\cdot\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot|AC|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|AB|\cdot\frac{1}{4}$$

Stąd $|AB| = 8\sqrt{3}$.

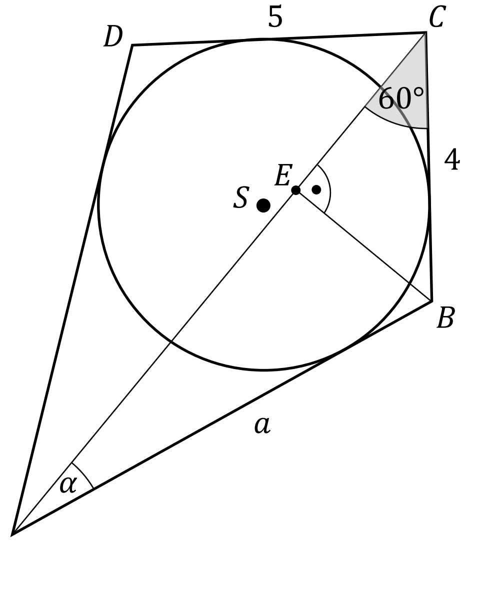
Ponieważ w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, więc prawdziwa jest zależność

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$$

Zatem obwód $Ob_{ABCD}$ czworokąta jest równy

$$Ob_{ABCD} = 2\cdot(|AB| + |CD|) = 16\sqrt{3} + 10$$

<u>*Sposób III*</u>




Oznaczmy $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Zgodnie z warunkami zadania $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Obliczamy długość $a$ boku $AB$.

Prowadzimy wysokość $BE$ trójkąta $ABC$.

Trójkąt prostokątny $BCE$ ma kąty ostre $30^\circ$ i $60^\circ$, więc jest „połową” trójkąta równobocznego o boku długości $4$. Zatem

$$|EB| = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Z definicji sinusa w trójkącie prostokątnym $ABE$ otrzymujemy

$$\sin\alpha = \frac{|EB|}{|AB|}$$

czyli

$$\frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{|AB|}$$

Stąd $|AB| = 8\sqrt{3}$.
Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, więc $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.
Zatem obwód $Ob_{ABCD}$ czworokąta jest równy

$$Ob_{ABCD} = 2 \cdot (|AB| + |CD|) = 16\sqrt{3} + 10$$

## Zadanie 14. (0–4)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymagania szczegółowe** |
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>P9.1) rozpoznaje w graniastosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów;<br>P9.3) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości graniastosłupów. |

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\sqrt{6}$.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością odcinka $SP$), np.:

$\frac{|SP|}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$ (z podobieństwa trójkątów $PHS$ i $AHB$, sposób I),

$18\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot |SP|$ (z równości pól $P_{HAB} = P_{BAS} + P_{HSB}$ ),

$9\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot |SP|$ (z równości $P_{HSB} = \frac{1}{2} \cdot |HS| \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot |HB| \cdot |SP|$, sposób II),

*ALBO*

– obliczenie pola trójkąta $HSR$ oraz długości odcinka $HR$: $P_{\Delta HSR} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ oraz $|HR| = 3\sqrt{3}$,

*ALBO*

– obliczenie długości odcinków $HP$ i $HS$: $|HP| = 2\sqrt{3}$ i $|HS| = 3\sqrt{2}$,

*ALBO*

– obliczenie długości odcinków $HP$ oraz cosinusa/tangensa kąta $SHP$: $|HP| = 2\sqrt{3}$ i $\cos\sphericalangle SHP = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ($\text{tg}\sphericalangle SHP = \frac{\sqrt{2}}{2}$),

*ALBO*

– obliczenie długości $AK$: $AK = 2\sqrt{6}$.

2 pkt – obliczenie długości boków trójkąta $HSB$: $|HS| = 3\sqrt{2}$, $|HB| = 6\sqrt{3}$, $|SB| = 3\sqrt{6}$

*ALBO*

– zapisanie proporcji wynikającej z podobieństwa dwóch trójkątów prostokątnych, przy czym jednym z nich jest trójkąt $HSP$,

*ALBO*

– obliczenie/zapisanie długości odcinków $BH$ oraz $SR$: $|BH| = 6\sqrt{3}$ oraz $|SR| = 3$,

*ALBO*

– obliczenie wartości funkcji trygonometrycznej kąta $SHR$: np. $\cos\sphericalangle SHR = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin\sphericalangle SHR = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{tg}\ \sphericalangle SHR = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *ALBO*

– obliczenie pola trójkąta $HAB$: $P_{\Delta HAB} = 18\sqrt{2}$,

*ALBO*

– obliczenie długości odcinka $SB$ i sinusa kąta $SBH$: $|SB| = 3\sqrt{6}$ i $\sin\sphericalangle SBH = \frac{1}{3}$,

*ALBO*

– zapisanie pola trójkąta $HAB$ jako sumy pól trójkątów $SAB$ oraz $HSB$ i zapisanie $P_{HSB} = \frac{1}{2} \cdot |HB| \cdot |SP|$ (lub $P_{HSB} = \frac{1}{2} \cdot P_{HAB}$),

*ALBO*

– zapisanie pola trójkąta $HSB$ na dwa sposoby: $P_{HSB} = \frac{1}{2} \cdot |HS| \cdot |AB|$ oraz $P_{HSB} = \frac{1}{2} \cdot |HB| \cdot |SP|$,

*ALBO*

– obliczenie pola trójkąta $HSB$: $P_{HSB} = 9\sqrt{2}$.

1 pkt – obliczenie/zapisanie długości jednego z odcinków $BH$, $SR$, $HS$ albo $BS$: $|BH| = 6\sqrt{3}$, $|SR| = 3$, $|HS| = 3\sqrt{2}$, $|BS| = 3\sqrt{6}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:
- a) zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej
- b) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa
- c) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
- d) błędne zastosowanie twierdzenia cosinusów lub sinusów
- e) błędne zastosowanie wzoru Herona

to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**2.** Jeżeli zdający korzysta ze związku $|HP| = \frac{1}{3} \cdot |HB|$ (gdzie $P$ jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka $S$ na podstawę $HB$ trójkąta $HSB$) i nie uzasadni jego prawdziwości, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

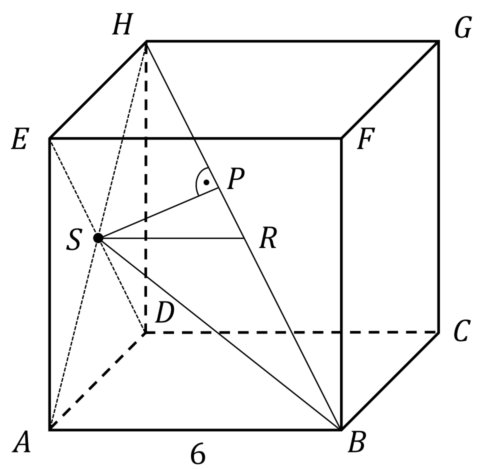
**Przykładowe pełne rozwiązania**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

$S$ – środek odcinka $AH$,

$R$ – środek odcinka $BH$,

$P$ – spodek wysokości trójkąta $SBH$ poprowadzonej z punktu $S$ na bok $BH$.



<u>*Sposób I*</u>

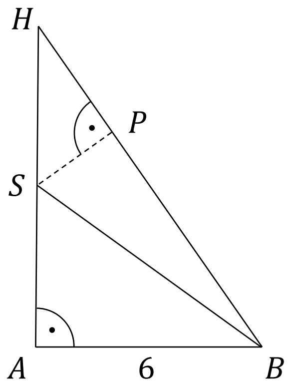
Obliczamy $|AH| = 6\sqrt{2}$, $|BH| = 6\sqrt{3}$.

Trójkąty $AHB$ i $PHS$ są podobne (cecha *kkk*), więc

$$\frac{|SP|}{|AB|} = \frac{|SH|}{|BH|}$$

$$\frac{|SP|}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$$

$$|SP| = \sqrt{6}$$




**Uwaga**:

Równanie $\frac{|SP|}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$ otrzymamy, stosując dwukrotnie definicję sinusa kąta $SHP$ w trójkątach prostokątnych $HSP$ i $HAB$.

<u>*Sposób II*</u>

Obliczamy $|AH| = 6\sqrt{2}$, $|BH| = 6\sqrt{3}$, $|HS| = 3\sqrt{2}$.

Obliczamy pole trójkąta $HSB$:

$$P_{\Delta HSB} = \frac{1}{2} \cdot |HS| \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = 9\sqrt{2}$$

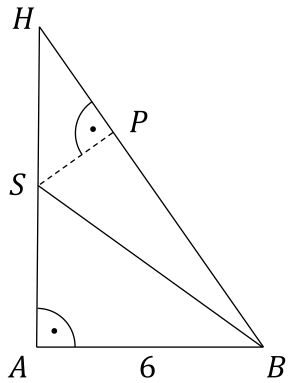
Ale

$$P_{\Delta HSB} = \frac{1}{2} \cdot |HB| \cdot |SP| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot |SP| = 3\sqrt{3} \cdot |SP|$$

Stąd

$$3\sqrt{3} \cdot |SP| = 9\sqrt{2}$$

więc $|SP| = \sqrt{6}$.




<u>*Sposób IIa*</u>

Odcinek $SR$ łączy środki boków w trójkącie $ABH$, jest więc równoległy do boku $AB$ i ma długość równą $|SR| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$.

Zauważmy, że trójkąt $HAB$ jest prostokątny, zatem trójkąt $HSR$ też jest prostokątny.

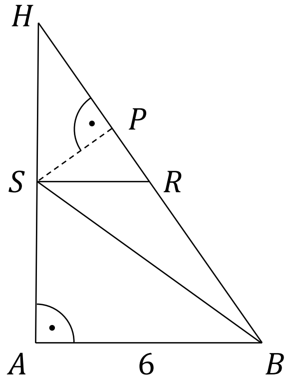
Obliczamy $|AH| = 6\sqrt{2}$, $|BH| = 6\sqrt{3}$.

Obliczamy pole trójkąta $HSR$:

$$P_{\Delta HSR} = \frac{1}{2}|HS| \cdot |SR| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

Ale

$$P_{\Delta HSR} = \frac{1}{2}|HR| \cdot |SP| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot |SP|$$



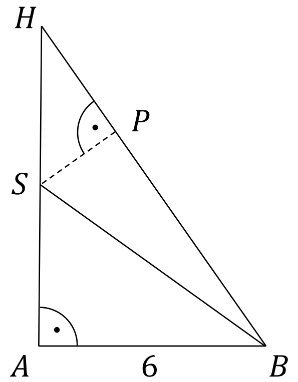
Stąd

$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot |SP| = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

więc $|SP| = \sqrt{6}$.

*Sposób III*

Wyznaczamy cosinus kąta $SHP$:




$$\cos\sphericalangle SHP = \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ponieważ $\cos\sphericalangle SHP = \frac{|HP|}{|HS|} = \frac{|HP|}{3\sqrt{2}}$, więc $\frac{|HP|}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

i stąd $|HP| = 2\sqrt{3}$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie $HPS$ mamy $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = |SP|^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$,
więc $|SP| = \sqrt{6}$.

*Sposób IV*

Obliczamy $|AH| = 6\sqrt{2}, |BH| = 6\sqrt{3}$.

Zauważamy, że trójkąt $HAB$ jest prostokątny. Pole trójkąta $HAB$ jest równe

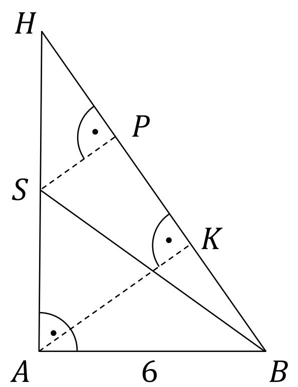
$$P_{\Delta HAB} = \frac{6\sqrt{2}\cdot 6}{2} = 18\sqrt{2}$$

Niech punkt $K$ będzie rzutem wierzchołka $A$ na bok $BH$ trójkąta $HAB$, zatem

$$\frac{|AK|\cdot|HB|}{2} = 18\sqrt{2}$$

$$|AK| = \frac{36\sqrt{2}}{|HB|} = \frac{36\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

Ponieważ trójkąty $HSP$ i $HAK$ są podobne, więc

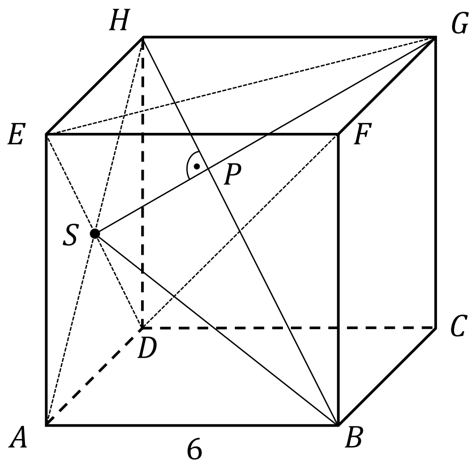



$$\frac{|HS|}{|SP|} = \frac{|HA|}{|AK|}$$

Stąd

$$|SP| = \frac{3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

**Uwaga:**
Zadanie można również rozwiązać, rozważając ostrosłupy $DEGH$ oraz $DEGB$. Prowadzimy odcinki $EG$ i $DG$. Trójkąt $EDG$ jest równoboczny, gdyż wszystkie jego boki są przekątnymi przystających kwadratów, a ponieważ odcinki $DH$, $EH$ i $GH$ mają równe długości, odcinki $DB$, $EB$ i $GB$ też mają równe długości, więc ostrosłupy $DEGH$ i $DEGB$ o wspólnej podstawie $DEG$ są prawidłowe.




Wynika stąd, że prosta $BH$ zawiera wysokości tych ostrosłupów, a to oznacza, że punkt $P$ jest środkiem ciężkości trójkąta $DEG$ o boku długości $|DE| = 6\sqrt{2}$. Zatem

$$|SP| = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

## Zadanie 15. (0–5)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymagania szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>R3.1) stosuje wzory Viète'a;<br>R3.2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem. |

**Zasady oceniania**
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{11}{5}, +\infty\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**
Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

**Drugi etap** polega na wyznaczeniu tych wartości parametru $m$, dla których jest spełniony warunek $x_1^3 + x_2^3 > -28$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą $m$, wynikającej z warunku $x_1^3 + x_2^3 > -28$: $m \in \left(2, \frac{9}{4}\right)$.

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą $m$, wynikającej z warunku $x_1^3 + x_2^3 > -28$, np. $-64 - 3 \cdot \left(-\frac{m-3}{m-2}\right) \cdot (-4) > -28$

*ALBO*

– zapisanie nierówności $\left(-2 - \sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^3 + \left(-2 + \sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^3 > -28$ i poprawne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy/różnicy do co najmniej jednego ze składników sumy $\left(-2 - \sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^3 + \left(-2 + \sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^3$.

1 pkt – przekształcenie nierówności $x_1^3 + x_2^3 > -28$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np.
$(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) > -28$

*ALBO*

– wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2}$ w zależności od $m$: $x_1 = \frac{-4-\sqrt{\frac{20m-44}{m-2}}}{2\cdot 1}$, $x_2 = \frac{-4+\sqrt{\frac{20m-44}{m-2}}}{2\cdot 1}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Trzeci** etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru $m$, które spełniają jednocześnie dwa warunki: $\Delta > 0$ i $x_1^3 + x_2^3 > -28$: $m \in \left(\frac{11}{5}, \frac{9}{4}\right)$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru $m$, które spełniają jednocześnie warunki $\Delta > 0$ i $x_1^3 + x_2^3 > -28$: $m \in \left(\frac{11}{5}, \frac{9}{4}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający popełni w I i/lub II etapie jedynie błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań z I i II etapu, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I i II, to za III etap otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd i przyjmie, że $x_1 + x_2 = \pm\frac{m-3}{m-2}$ lub $x_1 \cdot x_2 = \pm 4$, to za II etap może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, a za III etap otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd, który nie jest rachunkowy (np. pominie istotne nawiasy przy przekształcaniu nierówności $x_1^3 + x_2^3 > -28$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, albo przyjmie, że $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1 \cdot x_2]$, i konsekwentnie do popełnionego błędu doprowadzi rozwiązanie II etapu zadania do końca, to może uzyskać co najwyżej **1 punkt** za II etap.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

**I etap**

Trójmian kwadratowy $x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2}$, gdzie $m \neq 2$, ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik tego trójmianu jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$4^2 - 4 \cdot \left(-\frac{m-3}{m-2}\right) > 0$$

$$\frac{20m - 44}{m - 2} > 0$$

$$(20m - 44) \cdot (m - 2) > 0$$

$$20\left(m - \frac{11}{5}\right) \cdot (m - 2) > 0$$

$$m \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{11}{5}, +\infty\right)$$

**II etap**

*Sposób I*

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, dla których jest spełniony warunek $x_1^3 + x_2^3 > -28$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)>-28$$

$$-64-3\cdot\left(-\frac{m-3}{m-2}\right)\cdot(-4)>-28$$

$$\frac{m-3}{m-2}<-3$$

$$(4m-9)(m-2)<0$$

$$m\in\left(2,\frac{9}{4}\right)$$

*Sposób II*

Wyznaczamy pierwiastki $x_1, x_2$ trójmianu kwadratowego $x^2+4x-\frac{m-3}{m-2}$ :

$$x_1=\frac{-4-\sqrt{\frac{20m-44}{m-2}}}{2\cdot 1}=-2-\sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}$$

$$x_2=\frac{-4+\sqrt{\frac{20m-44}{m-2}}}{2\cdot 1}=-2+\sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}$$

Nierówność $x_1^3+x_2^3>-28$ możemy więc zapisać w postaci

$$\left(-2-\sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^3+\left(-2+\sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^3>-28$$

Oznaczmy $\sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}$ przez $p$. Wtedy

$$(-2-p)^3+(-2+p)^3>-28$$

Korzystając ze wzoru na sześcian różnicy i sześcian sumy, otrzymujemy dalej

$$(-8-12p-6p^2-p^3)+(-8+12p-6p^2+p^3)>-28$$

$$-12p^2-16>-28$$

$$12p^2-12<0$$

$$p^2-1<0$$

Zatem

$$\left(\sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^2-1<0$$

$$\frac{5m-11}{m-2}-1<0$$

$$\frac{5m-11-m+2}{m-2}<0$$

$$\frac{4m-9}{m-2}<0$$

$$(4m-9)(m-2)<0$$

$$m \in \left(2, \frac{9}{4}\right)$$

**Uwaga:**

Nierówność $(-2-p)^3+(-2+p)^3>-28$ możemy również przekształcić, korzystając ze wzoru na sumę sześcianów. Wtedy otrzymujemy

$$(-2-p+(-2)+p)[(-2-p)^2-(-2-p)(-2+p)+(-2+p)^2]>-28$$

$$-4(4+4p+p^2+p^2-4+4-4p+p^2)>-28$$

$$3p^2+4<7$$

$$p^2-1<0$$

**III etap**

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, które jednocześnie spełniają warunki $m \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{11}{5}, +\infty\right)$ oraz $m \in \left(2, \frac{9}{4}\right)$: $m \in \left(\frac{11}{5}, \frac{9}{4}\right)$.

## Zadanie 16. (0–7)

| Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>R11.6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych. |

### Zasady oceniania

**Część a)**

3 pkt – wyznaczenie pola $P$ trójkąta $ABC$ jako funkcji zmiennej $m$: $P(m) = \frac{m^2}{m-4}$.

2 pkt – wyznaczenie pierwszej (lub drugiej) współrzędnej punktu $C$: $x_C = \frac{m}{4-m}$

(lub $y_C = \frac{2m}{m-4}$).

1 pkt – wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej $BD$: $\frac{2}{3-m}$

*ALBO*

– zapisanie równania prostej $BD$ w postaci ogólnej, np. $2x + (m-3)y - 2m = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Część b)**

4 pkt – wyznaczenie równania prostej $BC$ w przypadku, gdy pole trójkąta $ABC$ jest najmniejsze, np. $y = -\frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$.

3 pkt – zbadanie znaku pochodnej funkcji $P$: $P'(m) > 0$ dla $m \in (8, +\infty)$ oraz $P'(m) < 0$ dla $m \in (4, 8)$, oraz wyznaczenie (z uzasadnieniem) wartości zmiennej $m$, dla której funkcja $P$ osiąga wartość najmniejszą, np.

funkcja $P$ zmiennej $m$ (określona na przedziale $(4, +\infty)$) jest rosnąca w przedziale $\langle 8, +\infty)$ oraz malejąca w przedziale $(4, 8\rangle$, więc w punkcie $m = 8$ osiąga najmniejszą wartość

*ALBO*

– uzasadnienie, że dla $m = 8$ funkcja $P$ osiąga wartość najmniejszą (przy metodzie średnich liczbowych).

2 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji $P$: $m = 8$

*ALBO*

– obliczenie wartości $m$, dla której zachodzi równość średniej arytmetycznej i geometrycznej liczb dodatnich $m - 4$ oraz $\frac{16}{m-4}$: $m = 8$.

1 pkt – wyznaczenie wzoru pochodnej funkcji $P$, np. $P'(m) = \frac{2m(m-4)-m^2 \cdot 1}{(m-4)^2}$

*ALBO*

– zapisanie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną liczb $m - 4$ oraz $\frac{16}{m-4}$:

$$\frac{m-4+\frac{16}{m-4}}{2} \geq \sqrt{(m-4)\cdot\frac{16}{m-4}}$$

*ALBO*

– zapisanie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną liczb $m-4, 4$ oraz $\frac{16}{m-4}$:

$$\frac{m-4+4+\frac{16}{m-4}}{3} \geq \sqrt[3]{(m-4)\cdot 4\cdot\frac{16}{m-4}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi do części b):**

1. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-”, znak pochodnej.
2. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości $m$, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający:
   – opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji $P$
   lub
   – zapisuje, że dla wyznaczonej wartości $m$ funkcja $P$ ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość.
   Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to za część b) może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający, przy uzasadnieniu, że funkcja $P$ przyjmuje najmniejszą wartość dla $m=8$, nie ogranicza się do przedziału $(4,+\infty)$, to za część b) może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
4. Akceptujemy przedziały monotoniczności $(4,8)$, $(8,+\infty)$.
5. Jeżeli zdający wyznaczy minimum lokalne i nie zapisze, że jest to wartość najmniejsza, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za część b).

**Przykładowe pełne rozwiązania**

**a)**

<u>*Sposób I*</u>

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej $BD$: $a_{BD}=\frac{2-0}{3-m}=\frac{2}{3-m}$.

Prosta $BD$ ma równanie $y=\frac{2}{3-m}\cdot(x-m)$.

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka $C=(x_C,y_C)$, rozwiązując układ równań $y=\frac{2}{3-m}\cdot(x-m)$ i $y=-2x$.

Stąd, dla $m>4$, otrzymujemy

$$\frac{2}{3-m}\cdot(x_C-m)=-2x_C$$

$$\left(\frac{2}{3-m}+2\right)x_C=\frac{2m}{3-m}$$

$$\frac{8-2m}{3-m}\cdot x_C=\frac{2m}{3-m}$$

$$\frac{4-m}{3-m}\cdot x_C=\frac{m}{3-m}$$

$$x_C=\frac{m}{4-m}$$

Wtedy $y_C=-2\cdot\frac{m}{4-m}=\frac{2m}{m-4}$. Zatem $C=\left(\frac{m}{4-m},\frac{2m}{m-4}\right)$.

Podstawa $AB$ trójkąta $ABC$ ma długość $|m|$. Wysokość trójkąta $ABC$ opuszczona z wierzchołka $C$ jest równa $\left|\frac{2m}{m-4}\right|$. Zatem pole $P$ tego trójkąta, jako funkcja zmiennej $m$, jest określone wzorem

$$P(m)=\frac{1}{2}\cdot|m|\cdot\left|\frac{2m}{m-4}\right|$$

Ponieważ $m>4$, więc $P(m)=\frac{m^2}{m-4}$.

<u>*Sposób II*</u>

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej $BD$: $a_{BD}=\frac{2-0}{3-m}=\frac{2}{3-m}$.

Punkt $C$ leży na prostej $y=-2x$, zatem ma współrzędne $(x_C,-2x_C)$.

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej $BC$: $a_{BC}=\frac{-2x_C-0}{x_C-m}=\frac{2x_C}{m-x_C}$.

Ponieważ $a_{BD}=a_{BC}$, więc dla $m>4$ otrzymujemy

$$\frac{2}{3-m}=\frac{2x_C}{m-x_C}$$

Stąd

$$x_C=\frac{m}{4-m}$$

Wtedy $-2x_C=-2\cdot\frac{m}{4-m}=\frac{2m}{m-4}$. Zatem $C=\left(\frac{m}{4-m},\frac{2m}{m-4}\right)$.

Podstawa $AB$ trójkąta $ABC$ ma długość $|m|$. Wysokość trójkąta $ABC$ opuszczona z wierzchołka $C$ jest równa $\left|\frac{2m}{m-4}\right|$. Zatem pole $P$ tego trójkąta, jako funkcja zmiennej $m$, jest określone wzorem

$$P(m)=\frac{1}{2}\cdot|m|\cdot\left|\frac{2m}{m-4}\right|$$

Ponieważ $m > 4$, więc $P(m) = \frac{m^2}{m-4}$.

**b)**

*Sposób I*

Wyznaczamy pochodną funkcji $P$:

$$P'(m) = \frac{2m(m-4) - m^2 \cdot 1}{(m-4)^2} = \frac{m^2 - 8m}{(m-4)^2} = \frac{m(m-8)}{(m-4)^2}$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji $P$:

$$P'(m) = 0 \quad \text{i} \quad m \in (4, +\infty)$$

$$\frac{m(m-8)}{(m-4)^2} = 0 \quad \text{i} \quad m \in (4, +\infty)$$

$$m(m-8) = 0 \quad \text{i} \quad m \in (4, +\infty)$$

$$m = 8$$

Ponieważ $P'(m) > 0$ dla $m \in (8, +\infty)$ oraz $P'(m) < 0$ dla $m \in (4, 8)$, więc funkcja $P$ jest malejąca w przedziale $(4, 8\rangle$ oraz rosnąca w przedziale $\langle 8, +\infty)$. Zatem funkcja $P$ osiąga wartość najmniejszą dla $m = 8$.

Gdy $m = 8$, to prosta $BC$ przechodzi przez punkty $B = (8, 0)$ oraz $D = (3, 2)$, więc ma równanie $y = \frac{2}{3-8} \cdot (x - 8)$, czyli $y = -\frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$.

*Sposób II*

Przekształcamy wyrażenie $\frac{m^2}{m-4}$:

$$\frac{m^2}{m-4} = \frac{(m^2 - 8m + 16) + 8m - 32 + 16}{m-4} = (m-4) + 8 + \frac{16}{m-4}$$

Ponieważ $m > 4$, więc liczby $m - 4$ oraz $\frac{16}{m-4}$ są dodatnie. Z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich $m - 4$ oraz $\frac{16}{m-4}$ otrzymujemy:

$$\frac{m - 4 + \frac{16}{m-4}}{2} \geq \sqrt{(m-4) \cdot \frac{16}{m-4}}$$

$$\frac{m - 4 + \frac{16}{m-4}}{2} \geq \sqrt{16}$$

$$m - 4 + \frac{16}{m-4} \geq 8$$

$$m - 4 + 8 + \frac{16}{m-4} \geq 16$$

$$P(m) \geq 16$$

przy czym równość zachodzi tylko dla tych $m$, dla których $m-4=\frac{16}{m-4}$ i jednocześnie $m>4$, tj. dla $m=8$.
Zatem funkcja $P$ osiąga wartość najmniejszą dla $m=8$.

Gdy $m=8$, to prosta $BC$ przechodzi przez punkty $B=(8,0)$ oraz $D=(3,2)$, więc ma równanie $y=\frac{2}{3-8}\cdot(x-8)$, czyli $y=-\frac{2}{5}x+\frac{16}{5}$.