CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2013/2014

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ROZWIĄZANIA ZADAŃ
I SCHEMAT PUNKTOWANIA

MAJ 2014

Zadanie 1. (0–1)

Obszar standardów	Opis wymagań	Poprawna odpowiedź (1 pkt)	
		Wersja arkusza A	Wersja arkusza B
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Interpretacja geometryczna układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (II.8.d)	**A**	**C**

Zadanie 2. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Stosowanie pojęcia procentu w obliczeniach (II.1.d)	**B**	**C**

Zadanie 3. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Posługiwanie się wzorami skróconego mnożenia (II.2.a)	**C**	**A**

Zadanie 4. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znajomość definicji logarytmu (II.1.h)	**D**	**C**

Zadanie 5. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie prostych równań wymiernych (II.3.e)	**C**	**B**

Zadanie 6. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (II.4.g)	**B**	**D**

Zadanie 7. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie zadań prowadzących do badania funkcji kwadratowej. (II.4.l)	**D**	**A**

Zadanie 8. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie równoległości prostych na podstawie ich równań kierunkowych (II.8.c)	**D**	**A**

Zadanie 9. (0–1)

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej (IV.1.f)	**D**	**B**

Zadanie 10. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie miejsca zerowego funkcji kwadratowej (I.4.j)	**B**	**D**

Zadanie 11. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym (II.5.a)	**A**	**D**

Zadanie 12. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach (II.7.b)	**C**	**B**

Zadanie 13. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie, czy dany ciąg jest geometryczny (II.5.b)	**D**	**A**

Zadanie 14. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Stosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (I.6.c)	**A**	**B**

Zadanie 15. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Posługiwanie się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (II.8.g)	**B**	**C**

Zadanie 16. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich, w tym z zastosowaniem trygonometrii (II.7.c)	**B**	**C**

Zadanie 17. (0–1)

Użycie i tworzenie strategii	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7.c)	**A**	**D**

Zadanie 18. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie wartości liczbowej wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej (II.2.e)	**A**	**B**

Zadanie 19. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach (III.9.b)	**A**	**D**

Zadanie 20. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych (III.9.b)	**C**	**B**

Zadanie 21. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie potęgi o wykładniku wymiernym oraz stosowanie praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (II.1.g)	**C**	**B**

Zadanie 22. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie potęgi o wykładniku wymiernym (II.1.g)	**B**	**A**

Zadanie 23. (0–1)

Rozumowanie i argumentacja	Wykorzystanie sumy, iloczynu i różnicy zdarzeń do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (V.10.c)	**A**	**D**

Zadanie 24. (0–1)

Użycie i tworzenie strategii	Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych (IV.10.b)	**C**	**C**

Zadanie 25. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Oblicza mediany danych (III.2.e)	**D**	**A**

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Wykresem funkcji kwadratowej $f\left(x\right)=2x^2+bx+c$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $W=\left(4,0\right)$. Oblicz wartości współczynników *b* i *c*.

Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej (IV.4.i)

Rozwiązanie (I sposób)

Ze wzorów $x_w=-\frac{b}{2a}$, $y_w=-\frac{\Delta}{4a}$ na współrzędne wierzchołka paraboli otrzymujemy:

$-\frac{b}{2\cdot 2}=4$ i $-\frac{\Delta}{4\cdot 2}=0$, więc $b=-16$ i $\Delta=0$.

Stąd $\left(-16\right)^2-4\cdot 2\cdot c=0$, czyli $c=32$.

Rozwiązanie (II sposób)

Wzór funkcji *f* doprowadzamy do postaci kanonicznej

$$f\left(x\right)=2\left(x^2+\frac{b}{2}x\right)+c=2\left(x^2+2\cdot\frac{b}{4}x+\frac{b^2}{16}\right)+c-\frac{b^2}{8}=2\left(x+\frac{b}{4}\right)^2+c-\frac{b^2}{8}.$$

Wierzchołek wykresu funkcji *f* ma zatem współrzędne $\left(-\frac{b}{4},c-\frac{b^2}{8}\right)$. Otrzymujemy układ równań

$$-\frac{b}{4}=4 \text{ i } c-\frac{b^2}{8}=0.$$

Stąd $b=-16$ i $c=\frac{b^2}{8}=\frac{16^2}{8}=32$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy :

- obliczy współczynnik *b*: $b=-16$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze układ dwóch równań z niewiadomymi *b* i *c*, np.: $-\frac{b}{4}=4$ i $c-\frac{b^2}{8}=0$,

  i nie rozwiąże go lub rozwiąże go z błędem.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy współczynniki *b* i *c*: $b=-16$, $c=32$.

Rozwiązanie (III sposób)

Ponieważ $x_w=4$ oraz $y_w=0$, więc parabola ma z osią *Ox* dokładnie jeden punkt wspólny, zatem wzór funkcji można zapisać w postaci kanonicznej $f\left(x\right)=2\left(x-4\right)^2$.

Stąd $f\left(x\right)=2x^2-16x+32$, zatem $b=-16$ i $c=32$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy zapisze, że $f(x) = 2(x-4)^2$.
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy obliczy współczynniki *b* i *c*: $b = -16$, $c = 32$.

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8 = 0$.

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązywanie równań wielomianowych metodą rozkładu na czynniki. (I.3.d)

Rozwiązanie (I sposób – metoda grupowania)
Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynu, stosując metodę grupowania wyrazów $9x^2(x+2) - 4(x+2) = 0$ lub $x\left(9x^2 - 4\right) + 2\left(9x^2 - 4\right) = 0$, stąd
$(x+2)\left(9x^2-4\right) = 0$.

Zatem $x = -2$ lub $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu, np.: $(x+2)\left(9x^2-4\right)$, i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x = -2$ lub $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$.

Rozwiązanie (II sposób – metoda dzielenia)
Stwierdzamy, że liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$. Dzielimy ten wielomian przez dwumian $(x+2)$ i otrzymujemy iloraz $(9x^2 - 4)$. Obliczamy pierwiastki trójmianu $(9x^2 - 4)$: $x_1 = -\frac{2}{3}$ oraz $x_2 = \frac{2}{3}$. Zatem $x = -2$ lub $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$.

albo

Stwierdzamy, że liczba $-\frac{2}{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$. Dzielimy ten wielomian przez dwumian $\left(x + \frac{2}{3}\right)$ i otrzymujemy iloraz $(9x^2 + 12x - 12)$. Obliczamy wyróżnik trójmianu $(9x^2 + 12x - 12)$: $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-12) = 576$. Stąd pierwiastkami trójmianu są liczby $x_1 = \frac{-12-24}{18} = -2$ oraz $x_2 = \frac{-12+24}{18} = \frac{2}{3}$. Zatem $x = -2$ lub $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$.

albo

Stwierdzamy, że liczba $\frac{2}{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$. Dzielimy ten wielomian przez dwumian $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ i otrzymujemy iloraz $(9x^2 + 24x + 12)$. Obliczamy wyróżnik trójmianu: $\Delta = 24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 12 = 144$. Stąd pierwiastkami trójmianu są liczby $x_1 = \frac{-24-12}{18} = -2$ oraz $x_2 = \frac{-24+12}{18} = -\frac{2}{3}$. Zatem $x = -2$ lub $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- podzieli wielomian $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$ przez dwumian $(x+2)$, otrzyma iloraz $(9x^2 - 4)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$ przez dwumian $\left(x - \frac{2}{3}\right)$, otrzyma iloraz $(9x^2 + 24x + 12)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$ przez dwumian $\left(x + \frac{2}{3}\right)$, otrzyma iloraz $(9x^2 + 12x - 12)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$ przez trójmian kwadratowy, np. $(9x^2 - 4)$, i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $-2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli w zapisie rozwiązania występuje jedna usterka, to za takie rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Zadanie 28. (0–2)

Udowodnij, że każda liczba całkowita k, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia (V.2.a)

<u>I sposób rozwiązania</u>

Ponieważ liczba całkowita k przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, więc $k = 7m + 2$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Wtedy

$$3k^2 = 3(7m+2)^2 = 3(49m^2 + 28m + 4) = 3 \cdot 49m^2 + 3 \cdot 28m + 12 = 7(3 \cdot 7m^2 + 3 \cdot 4m + 1) + 5.$$

Dwa pierwsze składniki tej sumy są podzielne przez 7, natomiast $12 = 7 + 5$. To oznacza, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5. To kończy dowód.

<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze wyrażenie w postaci: $3(7m+2)^2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, które nie przekreślają poprawności rozumowania.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy uzasadni tezę, np. zapisze wyrażenie w postaci $7(3 \cdot 7m^2 + 3 \cdot 4m + 1) + 5$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Ponieważ liczba całkowita k przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, więc $k \equiv 2 \pmod{7}$.

Stąd wynika, że $k^2 \equiv 4 \pmod{7}$. Ponadto $3 \equiv 3 \pmod{7}$, więc z własności kongruencji

$3k^2 \equiv 3 \cdot 4 \pmod{7} \equiv 12 \pmod{7} \equiv 5$. To kończy dowód.

<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze że $k^2 \equiv 4 \pmod{7}$.

<u>Uwaga</u>

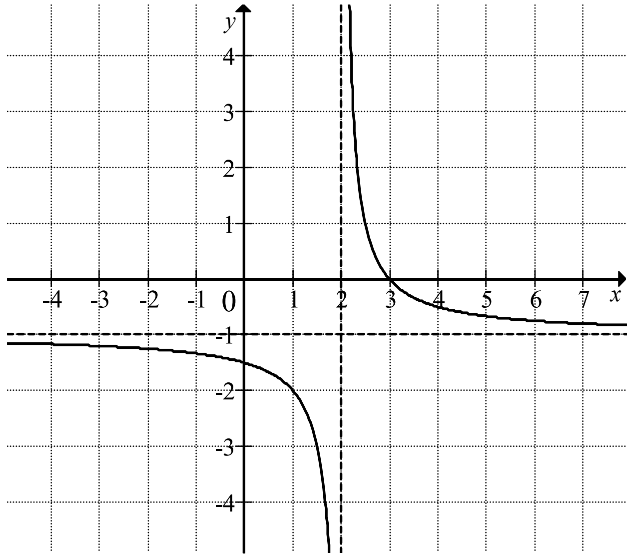
Zdający nie musi używać formalnego zapisu relacji kongruencji. Wystarczy wniosek: jeśli liczba k przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 7 daje resztę 4.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy zapisze $3k^2 \equiv 3 \cdot 4 \pmod{7} \equiv 12 \pmod{7} \equiv 5$.

Zadanie 29. (0–2)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji *f*, który powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji określonej wzorem $y=\frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 0$.



a) Odczytaj z wykresu i zapisz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji *f* są większe od 0.
b) Podaj miejsce zerowe funkcji *g* określonej wzorem $g(x)=f\left(x-3\right)$.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytywanie z wykresu funkcji jej własności; szkicowanie na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ wykresów funkcji $y=f(x+a)$, $y=f(x-a)$, $y=f(x)+a$, $y=f(x)-a$ (IV.4.b,d)

Rozwiązanie

a) Zapisujemy zbiór wszystkich argumentów, dla których $f(x)>0$: $\left(2,3\right)$.

b) Z rysunku wynika, że miejscem zerowym funkcji *f* jest liczba 3. Zatem miejscem zerowym funkcji *g* jest liczba $3+3=6$, ponieważ wykres funkcji *g* otrzymujemy przesuwając wykres funkcji *f* o 3 jednostki w prawo.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:
- zapisze zbiór wszystkich argumentów, dla których $f(x)>0$: $\left(2,3\right)$ lub $2<x<3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze miejsce zerowe funkcji *g*

albo
- poprawnie zapisze miejsce zerowe funkcji *g*: $x=6$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór argumentów, dla których $f(x)>0$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy zapisze zbiór wszystkich argumentów, dla których $f(x)>0$: $\left(2,3\right)$ i zapisze miejsce zerowe funkcji *g*: $x=6$.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

W rozwiązaniu podpunktu a) akceptujemy zapisy: $(3,\ 2)$, $x \in (3,\ 2)$.

Zadanie 30. (0–2)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia *A*, polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.

Modelowanie matematyczne	Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych; stosowanie twierdzenie znane jako *klasyczna definicja prawdopodobieństwa* do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (III.10.b,d)

Rozwiązanie I sposób „metoda klasyczna"

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary $(a,\ b)$ liczb z podanego zbioru. Jest to model klasyczny. Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 8 \cdot 8 = 64$. Wypisujemy zdarzenia elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6 i zliczamy je:

$$A = \{(5,\ 1), (6,\ 2), (7,\ 1), (7,\ 3), (8,\ 2), (8,\ 4)\}$$

Zatem $|A| = 6$.

Zapisujemy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia *A*: $P(A) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$.

Rozwiązanie II sposób „metoda tabeli"

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (a, b) liczb z podanego zbioru. Jest to model klasyczny. Budujemy tabelę ilustrującą sytuację opisaną w zadaniu.

1. \ 2.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1								
2								
3								
4								
5	X							
6		X						
7	X		X					
8		X		X				

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 8 \cdot 8 = 64$. Zliczamy, oznaczone krzyżykami, zdarzenia elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6: $|A| = 6$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A: $P(A) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 8 \cdot 8 = 64$

albo

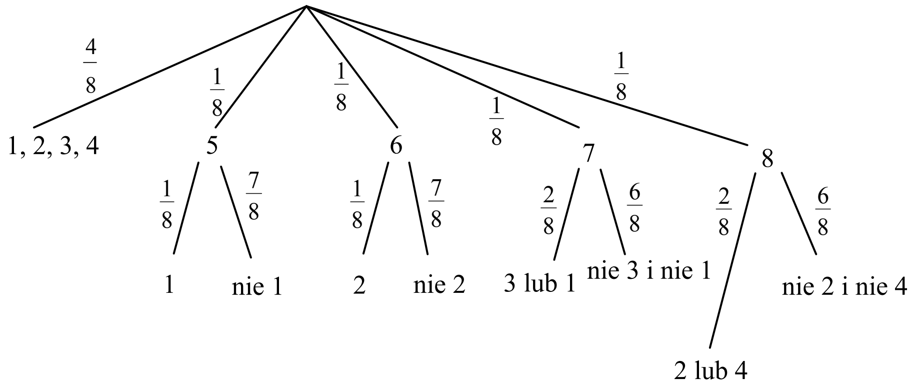
- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, polegającemu na wylosowaniu dwóch liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6: $|A| = 6$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy zapisze, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $P(A) = \frac{3}{32}$.

III sposób rozwiązania „metoda drzewka"

Rysujemy drzewo, z uwzględnieniem wszystkich gałęzi, które prowadzą do sytuacji sprzyjającej zdarzeniu A.



Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy narysuje drzewko uwzględniające wszystkie gałęzie, prowadzące do sytuacji sprzyjających zdarzeniu A i przynajmniej przy jednej gałęzi zapisze poprawne prawdopodobieństwo.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

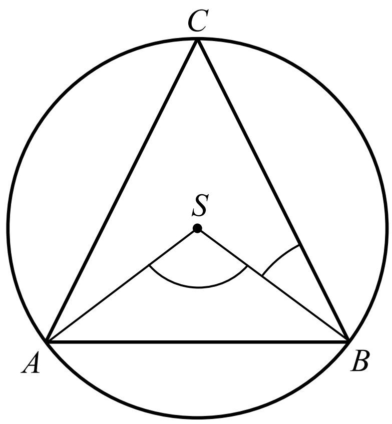
gdy zapisze, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $P(A) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$.

Uwagi

1. Akceptujemy przybliżenia dziesiętne otrzymanego wyniku, o ile są wykonane poprawnie oraz wynik zapisany w postaci $9,375\%$.
2. Jeżeli otrzymany wynik końcowy jest liczbą większą od 1, to zdający otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający stosuje różne modele probabilistyczne do obliczenia $|\Omega|$ i $|A|$, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 31. (0–2)

Środek S okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ABC, o ramionach AC i BC, leży wewnątrz tego trójkąta (zobacz rysunek).

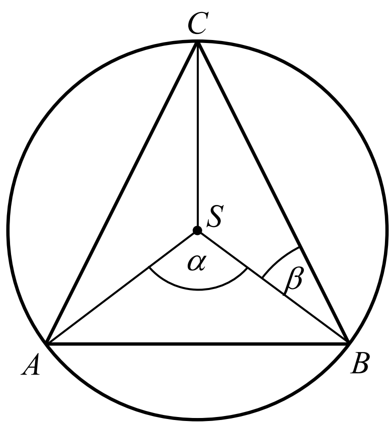


Wykaż, że miara kąta wypukłego ASB jest cztery razy większa od miary kąta wypukłego SBC.

Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego, z wykorzystaniem związków miarowych w figurach płaskich (V.7.c)

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku i poprowadźmy promień SC okręgu.



Z założenia wynika, że kąt wpisany ACB oraz kąt środkowy ASB leżą po tej samej stronie cięciwy AB.

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku wynika, że $|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}\alpha$. Trójkąt ABC jest równoramienny (ramionami są AC i BC), więc prosta CS zawiera dwusieczną kąta ACB, zatem $|\sphericalangle SCB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{4}\alpha$. Odcinki SC i SB to promienie okręgu, więc trójkąt BCS jest równoramienny. Stąd wynika, że $\beta = |\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SCB| = \frac{1}{4}\alpha$, co kończy dowód.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy

- wykorzysta twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym oraz wykorzysta równość kątów *SBC* i *SCB* lub równość kątów *SCA* i *SAC* i nie uzasadni tezy

albo

- wykorzysta twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym oraz uzasadni równość kątów *SBC* i *SAC*, korzystając z równoramienności trójkątów *ABC* i *ABS*, i nie uzasadni tezy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy uzasadni, że kąt *ASB* jest cztery razy większy od kąta *SBC*.

Uwaga

Jeżeli zdający w przedstawionym rozumowaniu rozważy wyłącznie szczególny przypadek, np. trójkąt równoboczny, to otrzymuje **0 punktów**.

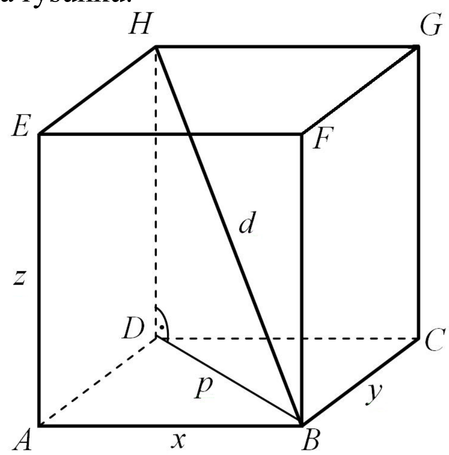
Zadanie 32. (0–4)

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 198. Stosunki długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka prostopadłościanu to $1 : 2 : 3$. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.

Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach (IV.9.b)

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole P_c powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe $P_c = 2xy + 2xz + 2yz$. Możemy przyjąć, że $x : y : z = 1 : 2 : 3$. Wtedy $y = 2x$ oraz $z = 3x$. Zatem

$$P_c(x) = 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 3x + 2 \cdot 2x \cdot 3x = 4x^2 + 6x^2 + 12x^2 = 22x^2.$$

Ponieważ $P_c = 198$, więc otrzymujemy równanie

$$22x^2 = 198.$$

Stąd $x^2 = 9$, więc $x = 3$.

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów *ABD* i *BDH* otrzymujemy

$$p^2 = x^2 + y^2 \text{ oraz } d^2 = p^2 + z^2.$$

Stąd

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Zatem

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (2x)^2 + (3x)^2} = \sqrt{14x^2} = x\sqrt{14} = 3\sqrt{14} .$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający

- zapisze długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka w zależności od jednej zmiennej, np.: x, $2x$, $3x$

albo

- zapisze długość przekątnej prostopadłościanu w zależności od długości jego krawędzi: $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający

- zapisze pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję jednej zmiennej, np.: $P_c(x) = 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 3x + 2 \cdot 2x \cdot 3x$

albo

- zapisze długość przekątnej prostopadłościanu jako funkcję jednej zmiennej, np.: $d = \sqrt{x^2 + (2x)^2 + (3x)^2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający obliczy długość jednej z krawędzi prostopadłościanu, np.: $x = 3$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający obliczy długość przekątnej prostopadłościanu: $d = 3\sqrt{14}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający odgadnie długość jednej z krawędzi prostopadłościanu i obliczy długość przekątnej tego prostopadłościanu, to otrzymuje maksymalnie **2 punkty**.

2. Jeżeli zdający błędnie uzależni długości krawędzi od jednej zmiennej, przyjmując: x, $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}x$, i konsekwentnie oblicza długość przekątnej tego prostopadłościanu, to otrzymuje maksymalnie **3 punkty**. Inne, niepoprawne interpretacje stosunków długości krawędzi, stanowią podstawę do przyznania za rozwiązanie **0 punktów**.

Zadanie 33. (0–5)

Turysta zwiedzał zamek stojący na wzgórzu. Droga łącząca parking z zamkiem ma długość 2,1 km. Łączny czas wędrówki turysty z parkingu do zamku i z powrotem, nie licząc czasu poświęconego na zwiedzanie, był równy 1 godzinę i 4 minuty. Oblicz, z jaką średnią prędkością turysta wchodził na wzgórze, jeżeli prędkość ta była o 1 km/h mniejsza od średniej prędkości, z jaką schodził ze wzgórza.

Modelowanie matematyczne	Rozwiązywanie zadań umieszczonych w kontekście praktycznym prowadzących do równań kwadratowych (III.3.b)

<u>Rozwiązanie (I sposób)</u>

Niech v oznacza średnią prędkość, wyrażoną w km/h, z jaką turysta schodził ze wzgórza, a t czas wyrażony w godzinach, w jakim zszedł ze wzgórza. Wówczas zależność między tą prędkością, czasem i przebytą drogą możemy zapisać w postaci

$$v\cdot t = 2{,}1 .$$

Średnia prędkość, z jaką turysta wchodził na wzgórze, jest zatem równa $v-1$, natomiast czas, w jakim wszedł, jest równy $1\frac{4}{60}-t=1\frac{1}{15}-t$. Możemy więc zapisać drugie równanie

$$(v-1)\cdot\left(\frac{16}{15}-t\right)=2{,}1 .$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{16}{15}v-v\cdot t-\frac{16}{15}+t=\frac{21}{10} .$$

Po podstawieniu $v\cdot t=\frac{21}{10}$ otrzymujemy

$$\frac{16}{15}v-\frac{21}{10}-\frac{16}{15}+t=\frac{21}{10} ,$$

$$t=\frac{79}{15}-\frac{16}{15}v .$$

Podstawiając $t=\frac{79}{15}-\frac{16}{15}v$ w równaniu $v\cdot t=\frac{21}{10}$, otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą v

$$v\left(\frac{79}{15}-\frac{16}{15}v\right)=\frac{21}{10} ,$$

$$\frac{16}{15}v^2-\frac{79}{15}v+\frac{21}{10}=0 ,$$

$$32v^2-158v+63=0 ,$$

$$\Delta=(-158)^2-4\cdot 32\cdot 63=16900 ,\ \sqrt{\Delta}=\sqrt{16900}=130$$

$$v_1=\frac{158-130}{2\cdot 32}=\frac{28}{2\cdot 32}=\frac{7}{16} ,\ v_2=\frac{158+130}{2\cdot 32}=\frac{288}{2\cdot 32}=\frac{9}{2} .$$

Pierwsze z rozwiązań równania nie spełnia warunków zadania, gdyż wtedy prędkość, z jaką turysta wchodziłby na wzgórze, byłaby ujemna, a to niemożliwe. Drugie rozwiązanie spełnia warunki zadania, gdyż wtedy $v-1=4{,}5-1=3{,}5$.

Odpowiedź: Średnia prędkość, z jaka turysta wchodził na wzgórze jest równa 3,5 km/h.

Rozwiązanie (II sposób)

Niech v oznacza średnią prędkość, wyrażoną w km/h, z jaką turysta schodził ze wzgórza. Wówczas czas, w jakim zszedł ze wzgórza, wyrażony w godzinach jest równy $\frac{2,1}{v}$. Ponieważ łączny czas wejścia i zejścia był równy 1 godzinę i 4 minuty, czyli $1\frac{4}{60}=1\frac{1}{15}=\frac{16}{15}$ godziny, więc czas, w jakim wchodził, był równy $\frac{16}{15}-\frac{2,1}{v}$ godziny. Stąd z kolei wynika, że średnia prędkość, z jaką wchodził, była równa $\frac{2,1}{\frac{16}{15}-\frac{2,1}{v}}$ km/h. Otrzymujemy w ten sposób równanie z niewiadomą v

$$\frac{2,1}{\frac{16}{15}-\frac{2,1}{v}}=v-1,$$

$$\frac{21}{10}\cdot\frac{30v}{32v-63}=v-1,$$

$$\frac{63v}{32v-63}=v-1,$$

$$63v=(v-1)(32v-63),$$

$$63v=32v^2-95v+63,$$

$$32v^2-158v+63=0,$$

$$\Delta=(-158)^2-4\cdot32\cdot63=16900,\ \sqrt{\Delta}=\sqrt{16900}=130$$

$$v_1=\frac{158-130}{2\cdot32}=\frac{28}{2\cdot32}=\frac{7}{16},\ v_2=\frac{158+130}{2\cdot32}=\frac{288}{2\cdot32}=\frac{9}{2}.$$

Pierwsze z rozwiązań równania nie spełnia warunków zadania, gdyż wtedy prędkość, z jaką turysta wchodziłby na wzgórze, byłaby ujemna. Drugie rozwiązanie spełnia warunki zadania, gdyż wtedy $v-1=4,5-1=3,5$.

Odpowiedź: Średnia prędkość, z jaką turysta wchodził na wzgórze jest równa 3,5 km/h.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zdający

- oznaczy prędkość średnią, wyrażoną w km/h, z jaką turysta schodził ze wzgórza oraz czas wyrażony w godzinach, w jakim schodził ze wzgórza, i zapisze zależność między średnią prędkością i czasem, w jakim turysta wchodził na wzgórze, np.:
  v – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza
  t – czas (w h), w jakim turysta schodził ze wzgórza
  $(v-1)\cdot\left(\frac{16}{15}-t\right)=2,1$

albo

- oznaczy prędkość średnią, wyrażoną w km/h, z jaką turysta wchodził na wzgórze oraz czas wyrażony w godzinach, w jakim wchodził na wzgórze, i zapisze zależność między średnią prędkością i czasem, w jakim turysta schodził ze wzgórza, np.:

v – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze
t – czas (w h), w jakim turysta wchodził na wzgórze

$$(v+1)\cdot\left(\frac{16}{15}-t\right)=2,1$$

Uwaga
Zdający nie otrzymuje punktu, jeśli zapisze jedynie $v\cdot t=2,1$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający
- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi v, t – odpowiednio prędkość i czas schodzenia turysty ze wzgórza, np.;
$$\begin{cases}(v-1)\cdot\left(\frac{16}{15}-t\right)=2,1\\ v\cdot t=2,1\end{cases}$$

albo
- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi v, t – odpowiednio prędkość i czas wchodzenia turysty na wzgórze, np.;
$$\begin{cases}(v+1)\cdot\left(\frac{16}{15}-t\right)=2,1\\ v\cdot t=2,1\end{cases}$$

albo
- oznaczy prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza, i uzależni od tej wielkości prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze, oraz czas, w jakim turysta wchodził na wzgórze, np.:
v – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza
$v-1$ to średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze
$\frac{2,1}{v-1}$ to czas (w h), w jakim turysta wchodził na wzgórze

albo
- oznaczy prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza, i uzależni od tej wielkości czas (w h), w jakim turysta schodził ze wzgórza, oraz czas, w jakim turysta wchodził na wzgórze, np.:
v – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza
$\frac{2,1}{v}$ to czas (w h), w jakim turysta schodził ze wzgórza
$\frac{16}{15}-\frac{2,1}{v}$ to czas (w h), w jakim turysta wchodził na wzgórze

albo
- oznaczy prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza, i uzależni od tej wielkości prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze, oraz czas, w jakim turysta schodził ze wzgórza, np.:
v – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza
$v-1$ to średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze
$\frac{2,1}{v}$ to czas (w h), w jakim turysta schodził ze wzgórza.

Uwaga
Jeśli zdający wprowadza tylko jedną niewiadomą na oznaczenie jednej z czterech wielkości: czas wchodzenia, czas schodzenia, prędkość wchodzenia, prędkość schodzenia, to **2 punkty** otrzymuje wtedy, gdy uzależni od wprowadzonej zmiennej dwie z pozostałych trzech wielkości.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, gdy v, t – odpowiednio prędkość i czas schodzenia turysty ze wzgórza, np.;
  $$v\left(\frac{79}{15}-\frac{16}{15}v\right)=2{,}1$$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, gdy v, t – odpowiednio prędkość i czas wchodzenia turysty na wzgórze, np.;
  $$v\left(\frac{16}{15}v-\frac{47}{15}\right)=2{,}1$$

albo

- oznaczy prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza, i uzależni od tej wielkości prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze, oraz czas, w jakim turysta wchodził na wzgórze i zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:
  $$\frac{2{,}1}{v-1}+\frac{2{,}1}{v}=\frac{16}{15}$$

Uwaga
Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 pkt**
Zdający

- rozwiąże równanie z niewiadomą inną niż średnia prędkość schodzenia bezbłędnie i nie obliczy średniej prędkości schodzenia

albo

- rozwiąże równanie z niewiadomą v (średnia prędkość schodzenia) z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**
Zdający obliczy średnią prędkość wchodzenia turysty na wzgórze: 3,5 km/h

Uwagi
1. Zdający może pominąć jednostki, o ile ustalił je w toku rozwiązania i stosuje je konsekwentnie.
2. Jeżeli zdający oznaczy przez v prędkość, z jaką turysta wchodził na wzgórze i zapisze, że $v-1$ oznacza prędkość, z jaką turysta schodził ze wzgórza i konsekwentnie do przyjętych oznaczeń rozwiąże zadanie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Przykład 1.
Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość, z jaką turysta schodził ze wzgórza, t - czas, w którym turysta schodził ze wzgórza i zapisze:

$$v-1=\frac{2,1}{\frac{16}{15}-t}$$

$$\begin{cases} v\cdot t=2,1 \\ (v-1)\frac{16}{15}-t=2,1 \end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia $\frac{16}{15}-t$ w nawias. Zapis równania $v-1=\frac{2,1}{\frac{16}{15}-t}$ wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

Przykład 2.
Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość, z jaką turysta schodził ze wzgórza, t - czas, w którym turysta schodził ze wzgórza i zapisze:

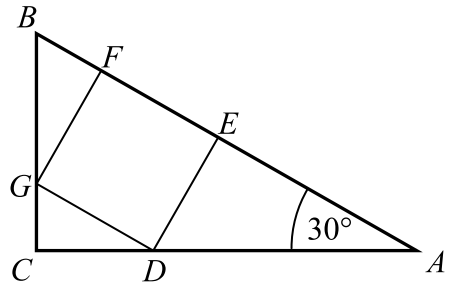
$$v-1=\frac{2,1}{\frac{16}{15}-t} \qquad \begin{cases} v=\frac{2,1}{t} \\ v-1=\frac{2,1}{\frac{16}{15}-t} \end{cases} \qquad \frac{2,1}{t}-1=\frac{2,1}{\frac{15}{16}-t}, \qquad \frac{2,1}{t}-1=\frac{2,1}{-t}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty,** mimo że w równaniu $\frac{2,1}{t}-1=\frac{2,1}{\frac{15}{16}-t}$ zdający przestawił liczby w liczniku i mianowniku ułamka $\frac{16}{15}$ lub nawet pominął ten ułamek.

Przykład 3.
Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np. $-32v^2+158v+63=0$ zamiast równania $32v^2-158v+63=0$ (np. w wyniku złego przepisania znaku), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci rozwiązanie niespełniające warunków zadania i pozostawi wynik, który może być realną prędkością poruszania się turysty, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.

Zadanie 34. (0–4)

Kąt *CAB* trójkąta prostokątnego *ACB* ma miarę $30°$. Pole kwadratu *DEFG* wpisanego w ten trójkąt (zobacz rysunek) jest równe 4. Oblicz pole trójkąta *ACB*.



Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach (IV.7.b)

__I sposób rozwiązania__

Niech *a* oznacza długość boku kwadratu *DEFG*. Zatem $a = 2$.

Trójkąt *ADE* to „połowa trójkąta równobocznego” o boku *AD* i wysokości *AE*, więc

$$|AD| = 2a = 4 \text{ oraz } |AE| = \frac{|AD|\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Trójkąt *GBF* to „połowa trójkąta równobocznego” o boku *BG* i wysokości *FG*, więc

$$|BG| = 2|BF| \text{ oraz } |FG| = \frac{|BG|\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem $2 = \frac{|BG|\sqrt{3}}{2}$, więc $|BG| = \frac{4}{\sqrt{3}}$ oraz $|BF| = \frac{1}{2}|BG| = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Trójkąt *ACB* jest „połową trójkąta równobocznego” o boku *AB*. Obliczamy

$$|AB| = |AE| + |EF| + |BF| = 2\sqrt{3} + 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2.$$

Pole trójkąta *ACB* jest więc równe

$$P_{ACB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{8}{3}\sqrt{3}+2\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{64}{3}+\frac{32}{3}\sqrt{3}+4\right) = \frac{19}{6}\sqrt{3}+4.$$

__Uwaga__

Podany sposób rozwiązania polega na rozwiązaniu trójkątów prostokątnych *ADE* i *BGF*. Tak samo możemy postąpić rozwiązując inną parę trójkątów prostokątnych: *ADE* i *DCG* lub *DCG* i *BGF*.

__**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający obliczy długość boku kwadratu: 2.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający skorzysta z własności trójkąta $30°, 60°, 90°$ albo z funkcji trygonometrycznych i poprawnie obliczy długość jednego z odcinków: $|AD| = 4$, $|AE| = 2\sqrt{3}$, $|BG| = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $|BF| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $|CD| = \sqrt{3}$, $|CG| = 1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający poprawnie obliczy długość jednego z boków trójkąta *ACB*:
$\left|AB\right| = \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2$ lub $\left|BC\right| = \frac{4}{\sqrt{3}} + 1$ lub $\left|AC\right| = \sqrt{3} + 4$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Zdający obliczy pole trójkąta *ACB*: $P_{ACB} = \frac{19}{6}\sqrt{3} + 4$.

Uwaga
Jeżeli zdający zapisze wynik w innej, równoważnej postaci, to otrzymuje **4 punkty**, np.:
$P_{ACB} = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{8}{3}\sqrt{3} + 2\right)^2$, $P_{ACB} = \frac{1}{2}\left(4 + \sqrt{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

II sposób rozwiązania
Niech *a* oznacza długość boku kwadratu *DEFG*. Zatem $a = 2$.
Trójkąt *ADE* to „połowa trójkąta równobocznego” o boku *AD*, więc $\left|AD\right| = 2a = 4$. Zatem pole tego trójkąta jest równe

$$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left|AD\right|^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{8} = 2\sqrt{3}.$$

Trójkąt *GBF* to także „połowa trójkąta równobocznego” o boku *BG*, więc $\left|BG\right| = 2\left|BF\right|$

Zatem $2 = \frac{\left|BG\right|\sqrt{3}}{2}$, więc $\left|BG\right| = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Pole trójkąta *GBF* jest więc równe

$$P_{GBF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left|BG\right|^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \sqrt{3}}{8} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Trójkąt *DGC* również jest „połową trójkąta równobocznego” o boku *DG*. Ponieważ $\left|DG\right| = a = 2$, więc pole tego trójkąta jest równe

$$P_{DCG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left|DG\right|^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Obliczamy pole trójkąta *ACB*

$$P_{ACB} = P_{ADE} + P_{GBF} + P_{DCG} + P_{DEFG} = 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 = \frac{19}{6}\sqrt{3} + 4.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zdający obliczy długość boku kwadratu: 2.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy pole jednego z trójkątów *ADE*, *GBF*, *DCG*:

$P_{ADE} = 2\sqrt{3}$, $P_{GBF} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $P_{DCG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający obliczy pole każdego z trójkątów *ADE*, *GBF*, *DCG*:

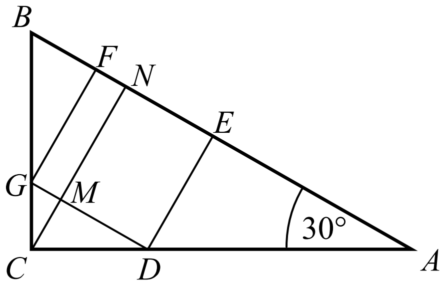
$P_{ADE} = 2\sqrt{3}$, $P_{GBF} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $P_{DCG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający obliczy pole trójkąta *ACB*: $P_{ACB} = \frac{19}{6}\sqrt{3} + 4$.

<u>**III sposób rozwiązania**</u>

Niech *a* oznacza długość boku kwadratu *DEFG*. Zatem $a = 2$. Zauważmy, że trójkąt *ACB* jest podobny do trójkąta *DCG*



Trójkąt *DCG* to „połowa trójkąta równobocznego” o boku *DG* długości 2, więc jego pole jest równe

$$P_{DCG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|DG|^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Wysokość *CM* tego trójkąta obliczymy wykorzystując wzór na jego pole

$$P_{DCG} = \frac{1}{2} \cdot |DG||CM| = \frac{1}{2} \cdot 2|CM| = |CM| ,$$

więc $|CM| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem wysokość *CN* trójkąta *ACB* opuszczona na *AB* jest równa

$$|CN| = |CM| + |MN| = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 .$$

Skala podobieństwa trójkąta *ACB* do trójkąta *DCG* jest więc równa

$$\frac{|CN|}{|CM|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}} .$$

Ponieważ stosunek pól figur podobnych równy jest kwadratowi skali ich podobieństwa, więc

$$\frac{P_{ACB}}{P_{DCG}} = \left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{3} = \frac{19}{3} + \frac{8}{\sqrt{3}} .$$

Stąd i z obliczonego wcześniej pola trójkąta *DCG* otrzymujemy

$$P_{ACB} = \left(\frac{19}{3} + \frac{8}{\sqrt{3}}\right) P_{DCG} = \left(\frac{19}{3} + \frac{8}{\sqrt{3}}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{19}{6}\sqrt{3} + 4 .$$

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający obliczy długość boku kwadratu: 2.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy pole jednego z trójkątów *ADE*, *GFB*, *DCG*:

$P_{ADE} = 2\sqrt{3}$, $P_{GBF} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $P_{DCG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający obliczy skalę podobieństwa trójkąta *ACB* do jednego z trójkątów *ADE*, *GFB*, *DCG* i wykorzysta twierdzenie o stosunku pól figur podobnych, np.:

$\frac{|CN|}{|CM|} = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}$, $\frac{P_{ACB}}{P_{DCG}} = \left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający obliczy pole trójkąta *ACB*: $P_{ABC} = \frac{19}{6}\sqrt{3} + 4$.