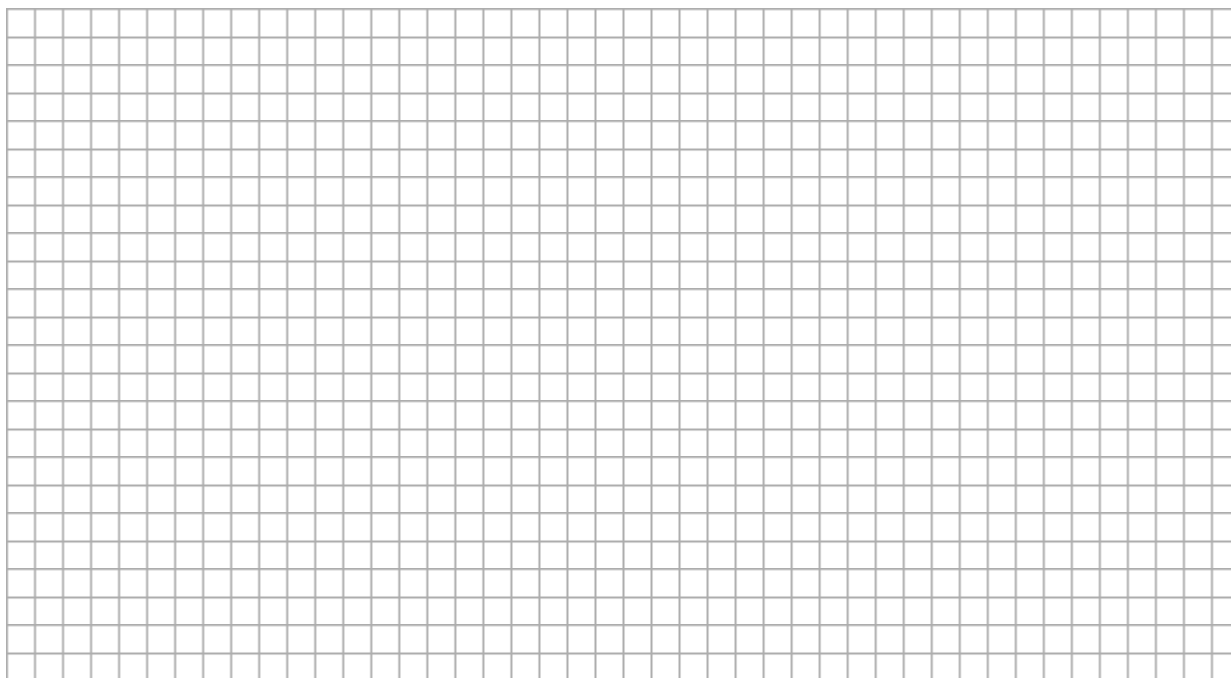


Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 12 – podobne zadanie na tescie 3 na Kursie Rocznym

Zadanie (4 pkt.)

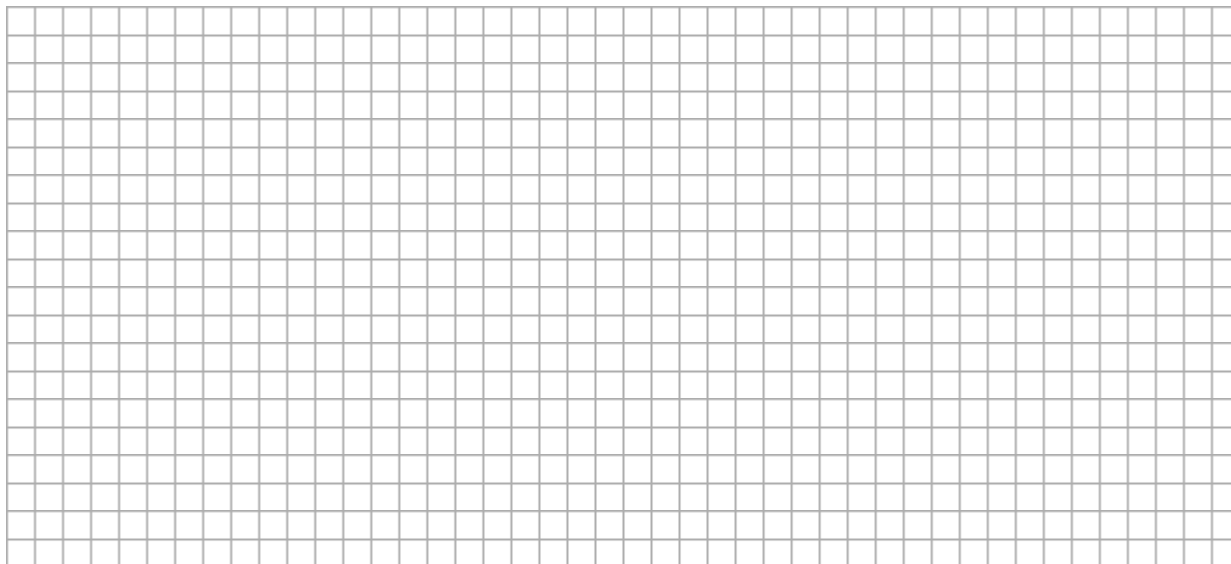
Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$



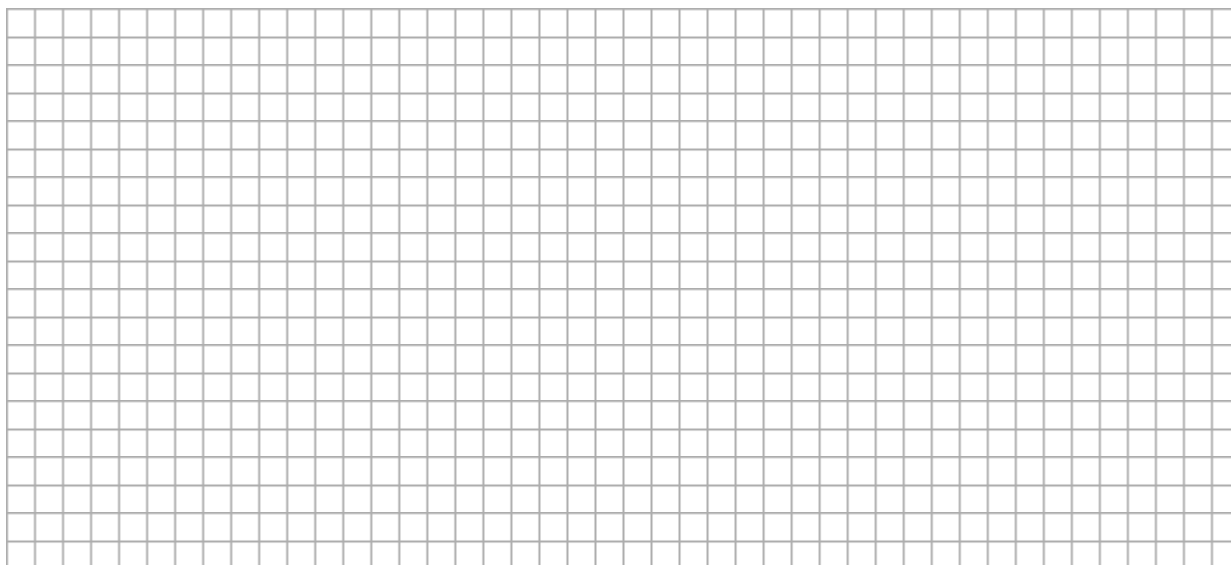
Zadanie (1 pkt.)

Zbadaj zbieżność ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2}{n^2 + 5}$.

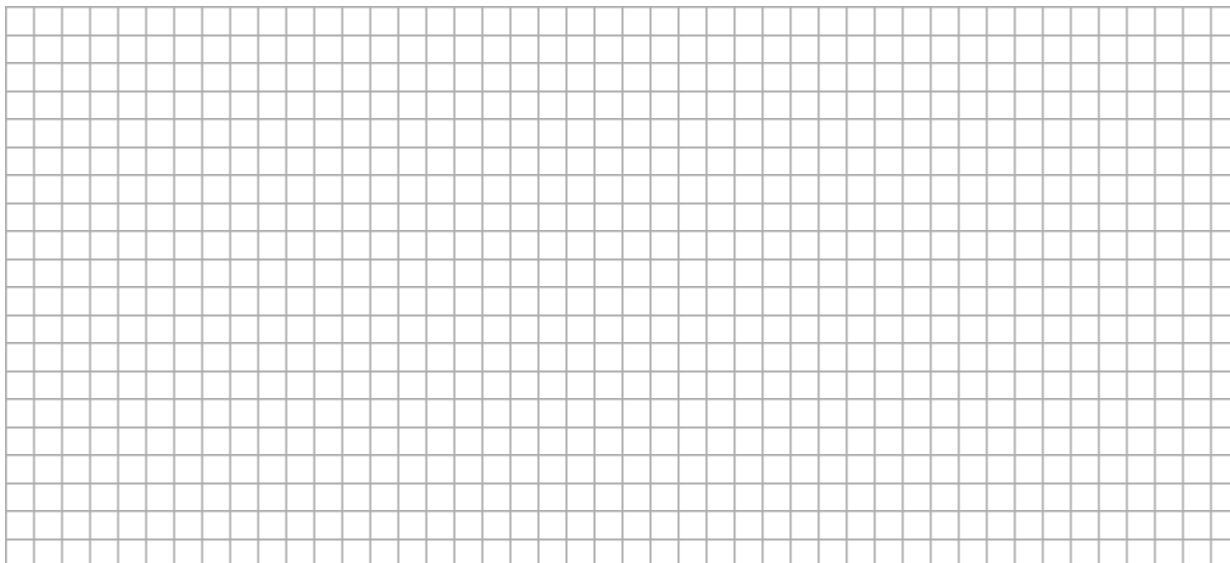
**Zadanie (1 pkt.)**

Oblicz granice ciągów:

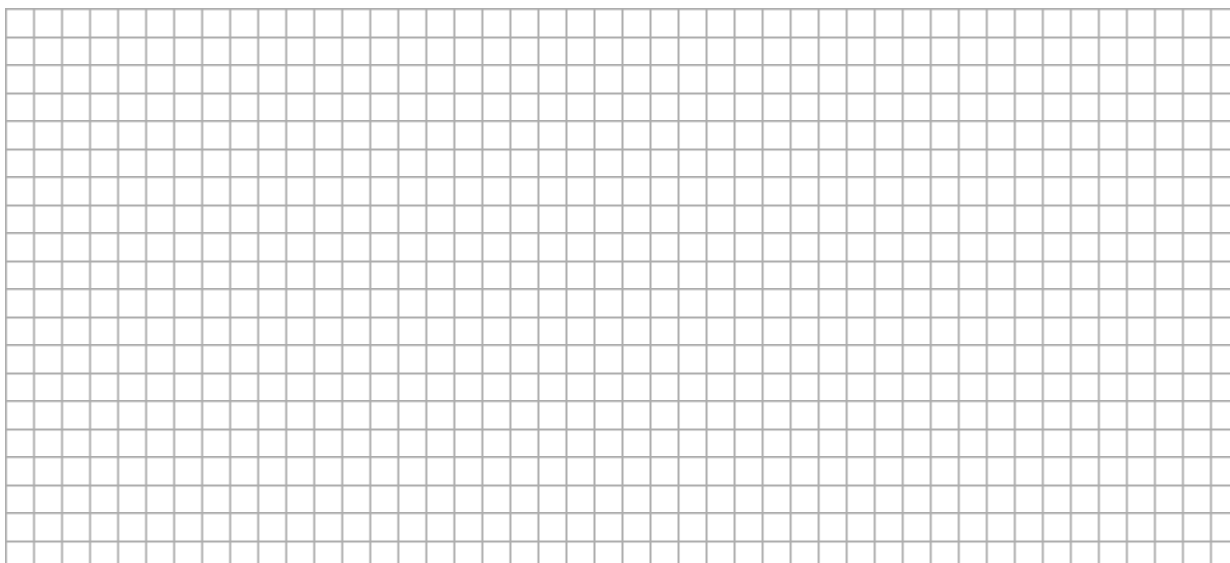
1. $a_n = \frac{2n^2 - 3n + 5}{3 + 7n - 6n^2}$



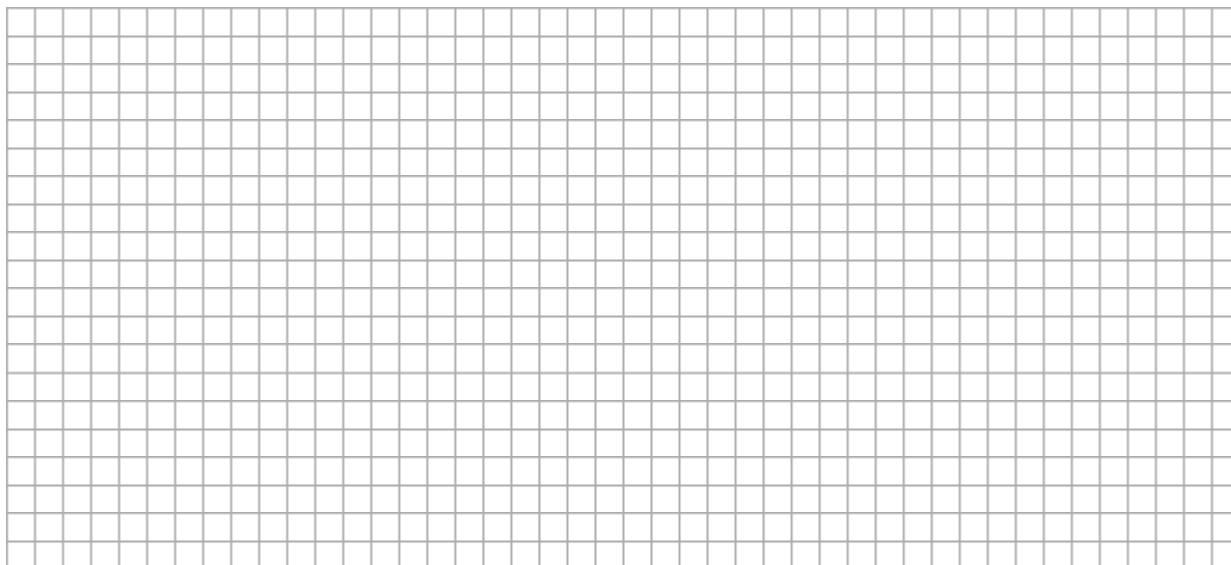
$$2. a_n = n - \sqrt{n^2 + 5n}$$



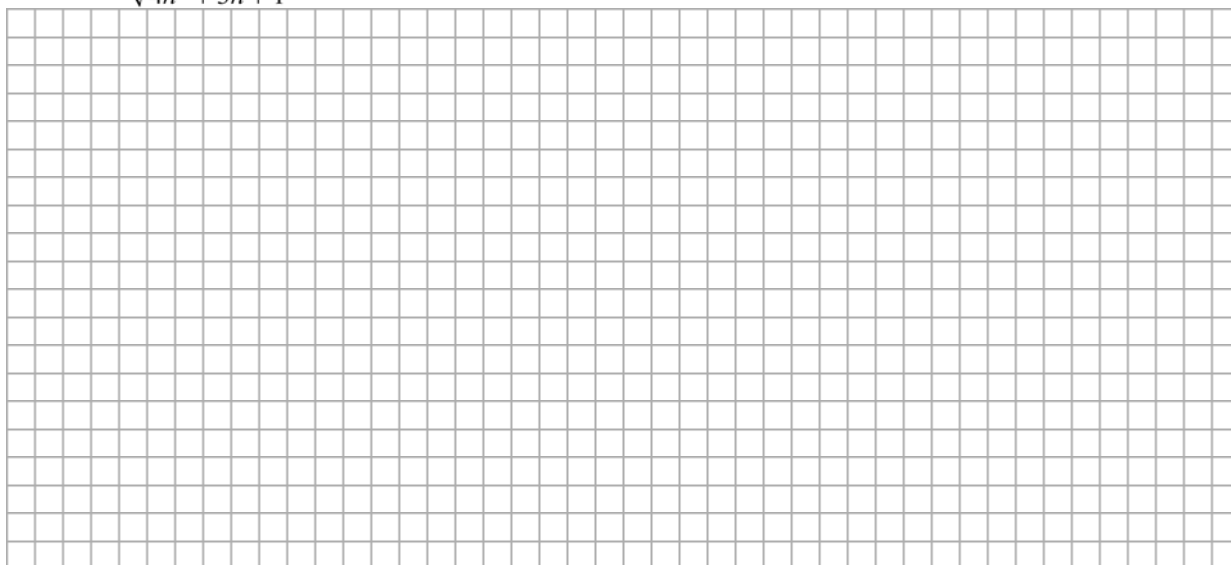
$$3. a_n = \frac{(n+1)(2n+3)}{(3n-2)(n+5)}$$



$$4. a_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n + 3^n}$$

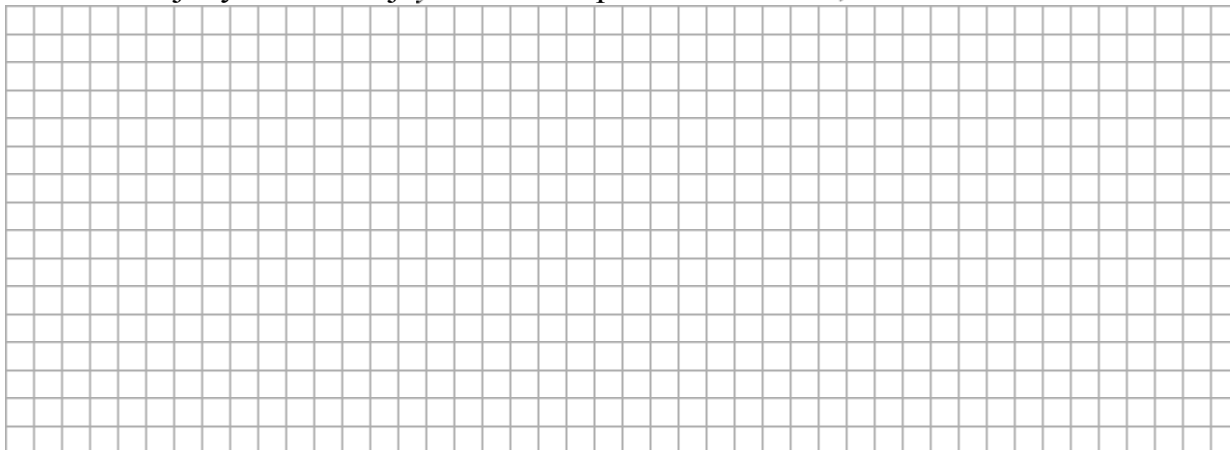
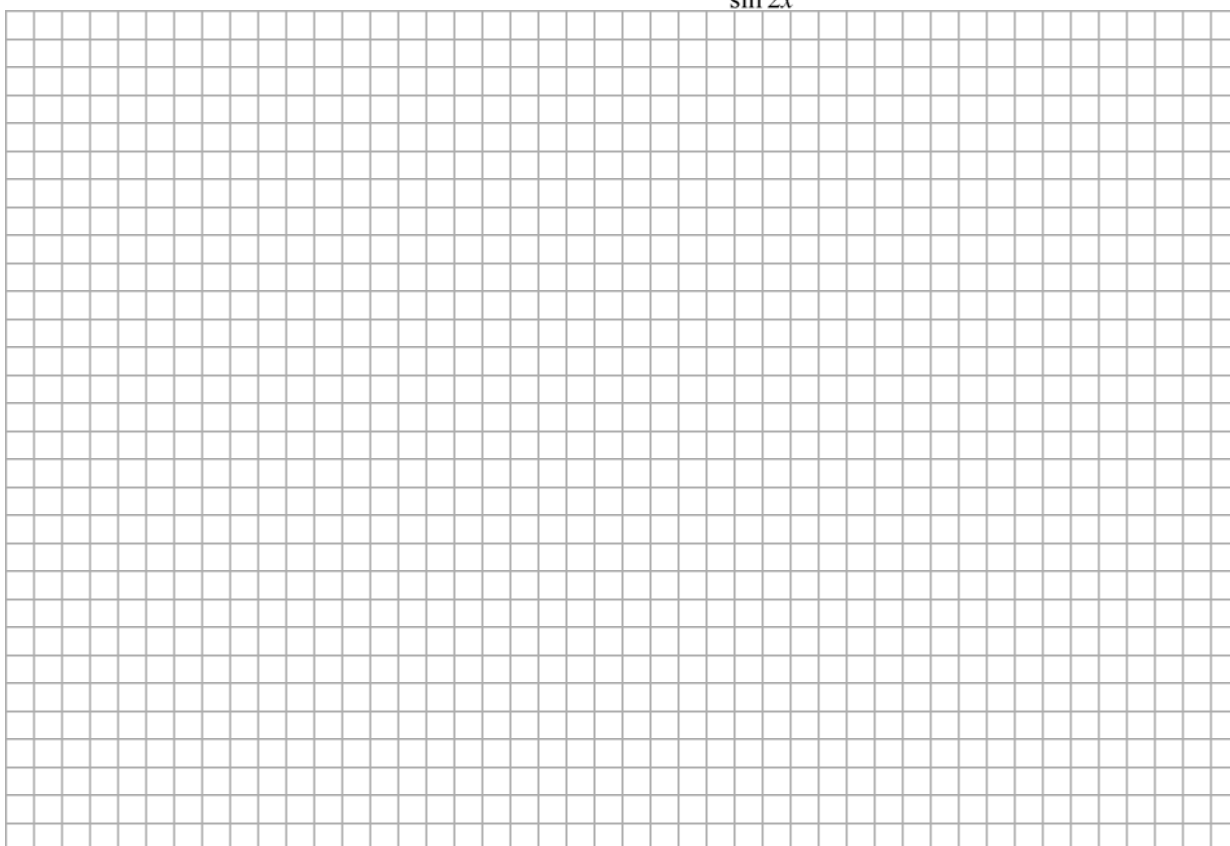


$$5. a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{4n^4+3n+1}}$$



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 14 – pytanie oryginalne (CKE)**Zadanie (4 pkt.)**

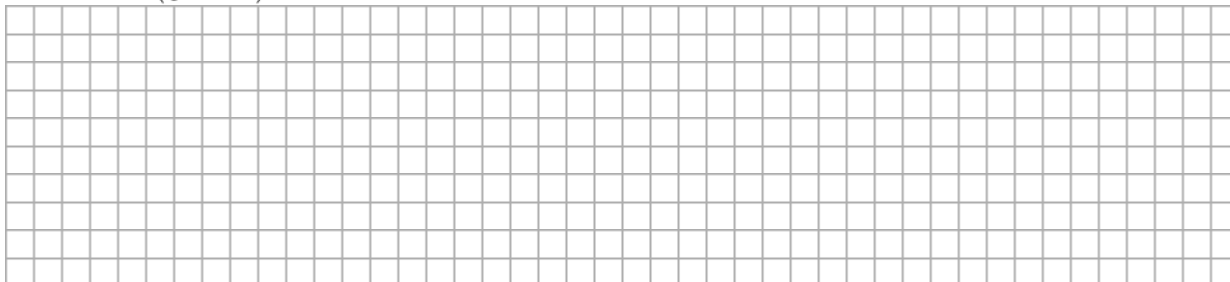
Wykonaj polecenia.

1. Naskicuj wykres funkcji $y = \sin 2x$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$.2. Naskicuj wykres funkcji $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$.

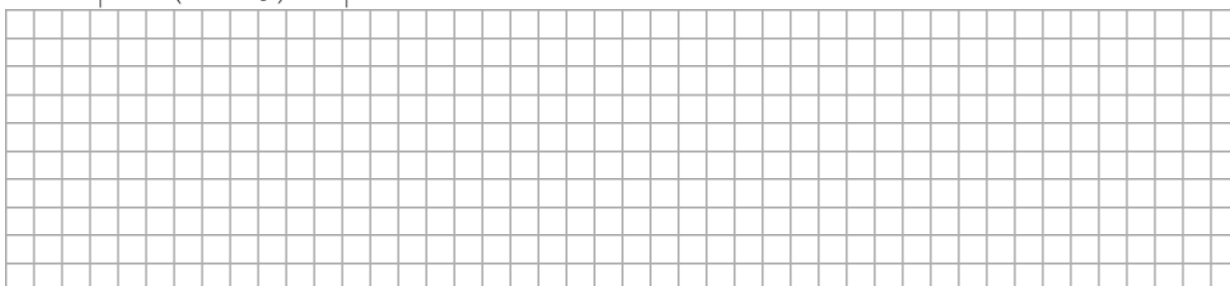
Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 14 – podobne zadanie na wykładzie 8 na Kursie Rocznym (poziom II)**Zadanie (1 pkt.)**

Wykonaj wykresy funkcji:

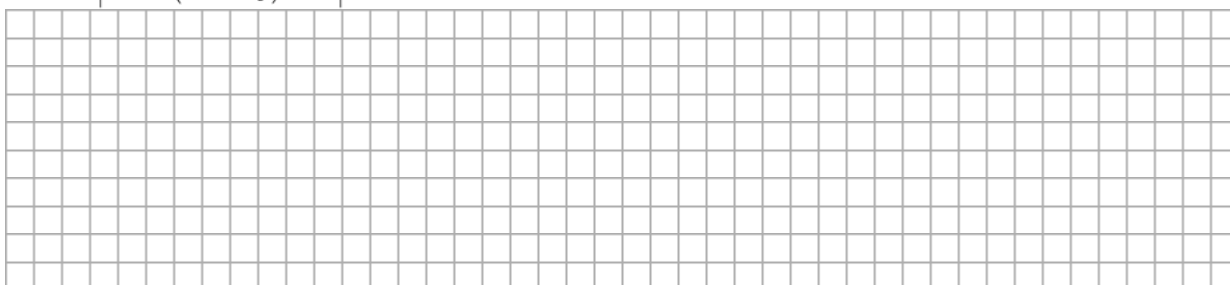
1. $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - 1$



2. $y = \left| 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \right|$



3. $y = \left| 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \right|$



4. $y = |\text{ctg}3x - 1| - 2$



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 14 – podobne zadanie na wykładzie 9 na Kursie Rocznym (poziom I)

Zadanie (1 pkt.)

Sporządź wykresy funkcji:

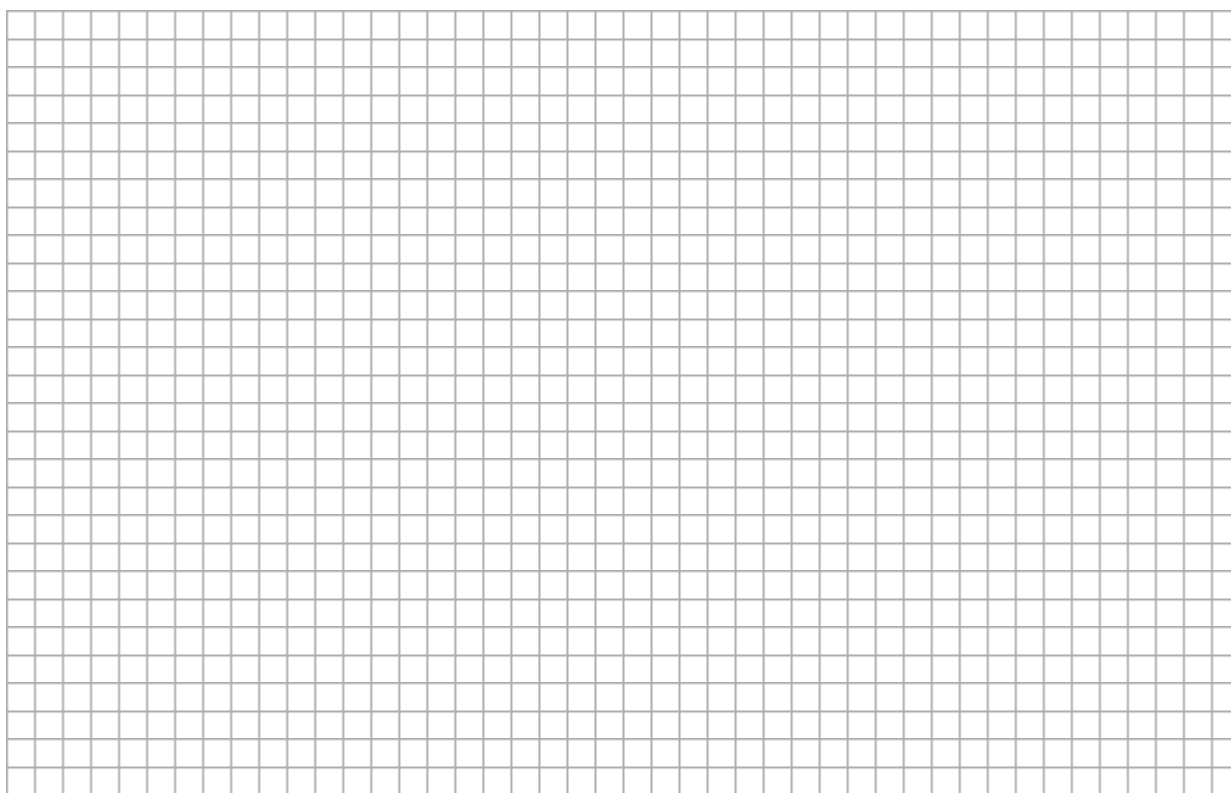
1. $y = 2\sin x$

2. $y = \sin |x|$

3. $y = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

4. $y = ||\operatorname{tg}x| - 1|$

5. $y = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

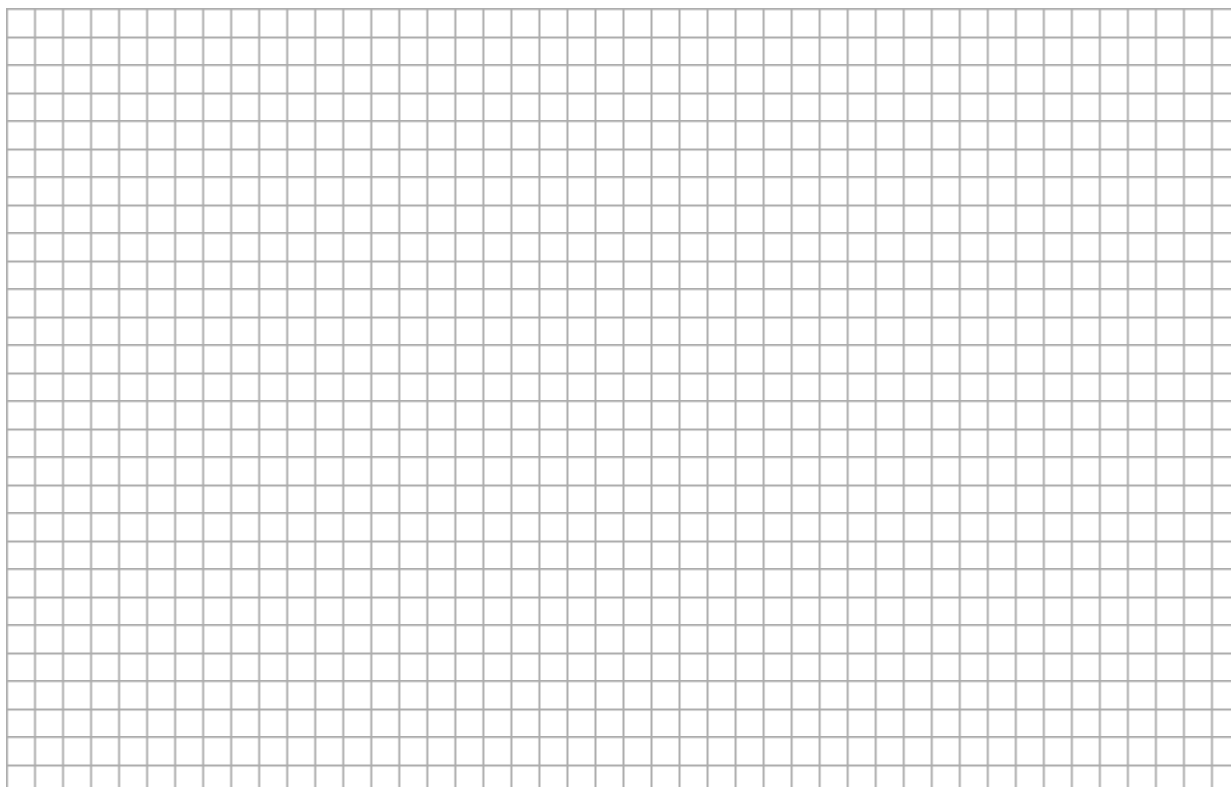


Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 14 – podobne zadanie na tescie 9 na Kursie Rocznym

Zadanie (6 pkt.)

1. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sin \left| 2x + \frac{\pi}{3} \right|$

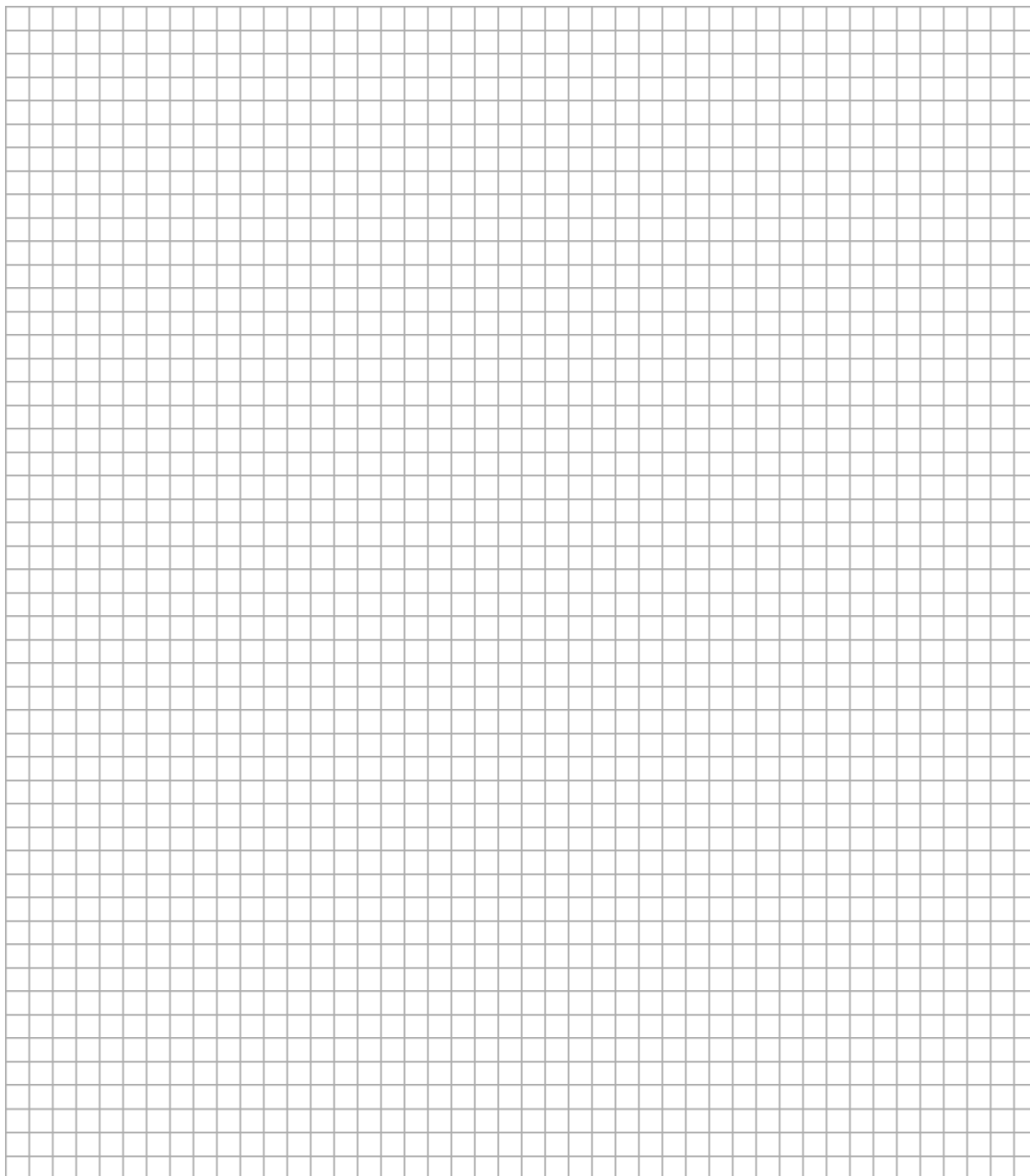
2. Posługując się wykresem rozwiąż nierówność $\sin \left| 2x + \frac{\pi}{3} \right| > \frac{1}{2}$.



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 15 – podobne zadanie na tescie 12 na Kursie Rocznym**Zadanie (5 pkt.)**

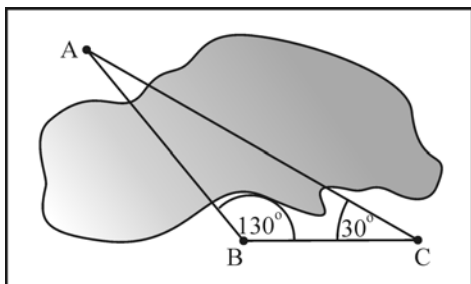
W pewnym kasynie są dwa rodzaje automatów do gry. Prawdopodobieństwo wygrania na automacie pierwszego rodzaju jest równe 25%, a na automacie drugiego rodzaju jest równe 30%. Automatów pierwszego rodzaju jest o 4 więcej niż drugiego.

Prawdopodobieństwo wygrania na losowo wybranym automacie jest równe $\frac{4}{15}$. Oblicz, ile automatów do gry znajduje się w kasynie.



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 16 – pytanie oryginalne (CKE)**Zadanie (3 pkt.)**

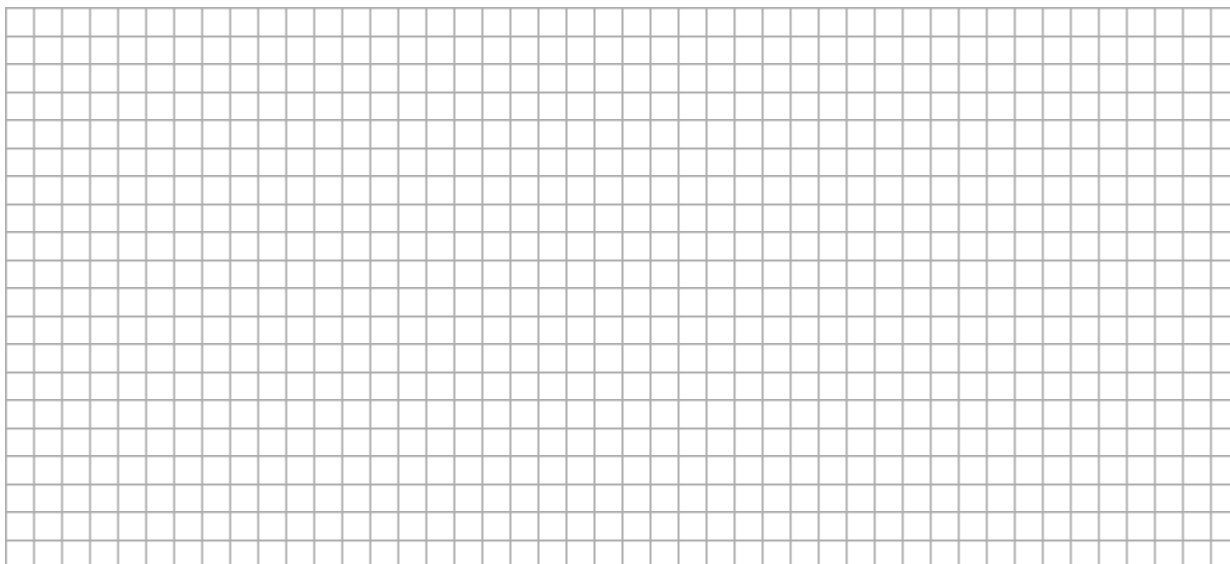
Obiekty A i B leżą po dwóch stronach jeziora. W terenie dokonano pomiarów odpowiednich kątów i ich wyniki przedstawiono na rysunku. Odległość między obiektami B i C jest równa 400 m. Oblicz odległość w linii prostej między obiektami A i B i podaj wynik, zaokrąglając go do jednego metra.



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 16 – podobne zadanie na wykładzie 12 na Kursie Rocznym (poziom I)

Zadanie (1 pkt.)

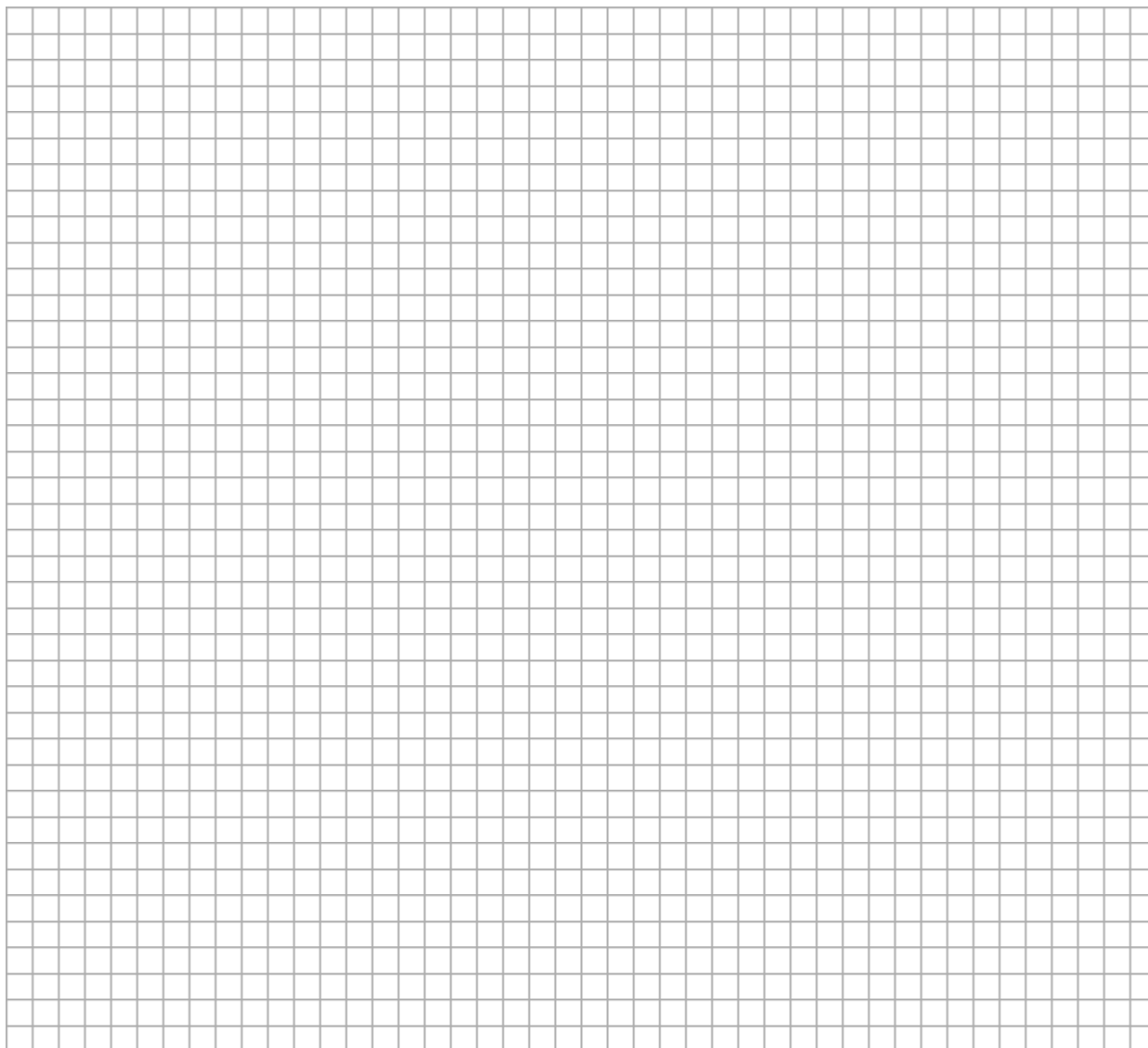
Architekt projektujący dom chce wyznaczyć szerokość okapu tak, aby latem, kiedy kąt padania promieni słonecznych ma miarę 10° , pionowa ściana domu o wysokości 3,2 m była akurat w cieniu. Oblicz szerokość okapu, jeżeli kąt pomiędzy płaszczyzną dachu i ścianą domu wynosi 65° .



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 16 – podobne zadanie na maturze próbnej 2 na Kursie Rocznym

Zadanie (4 pkt.)

Kąt padania promieni słonecznych, to kąt jaki z pionem tworzą promienie słoneczne. Latem kąt padania promieni słonecznych w południe w naszej szerokości wynosi 10° . Jak zaprojektować długość okapu, aby ściana domu wysokości 3,2 m była w południe cała w cieniu, jeżeli płaszczyzna dachu tworzy z płaszczyzną ściany kąt 65° ?
Odpowiedź podaj w pełnych cm ($\sin 10^\circ \approx 0,1736$).

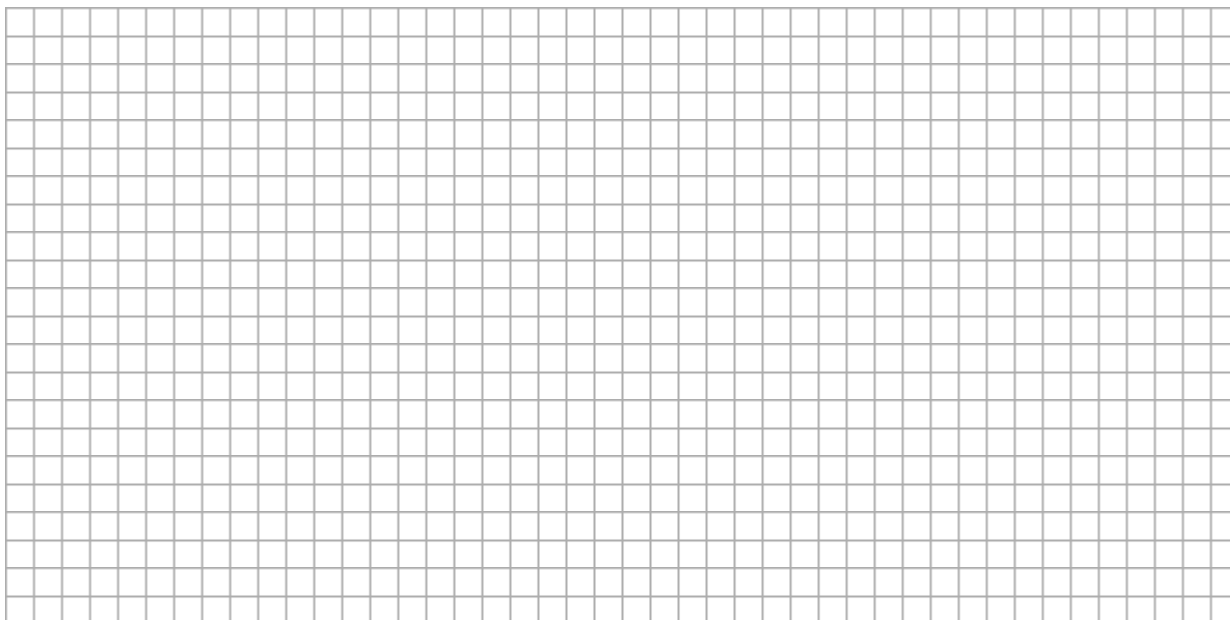


Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 16 – podobne zadanie w pracy domowej 7 na Kursie Rocznym

Zadanie (3 pkt.)

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O . Mając $AB = c$ oraz kąty $AOC = \beta$ i kąt $BOC = \alpha$

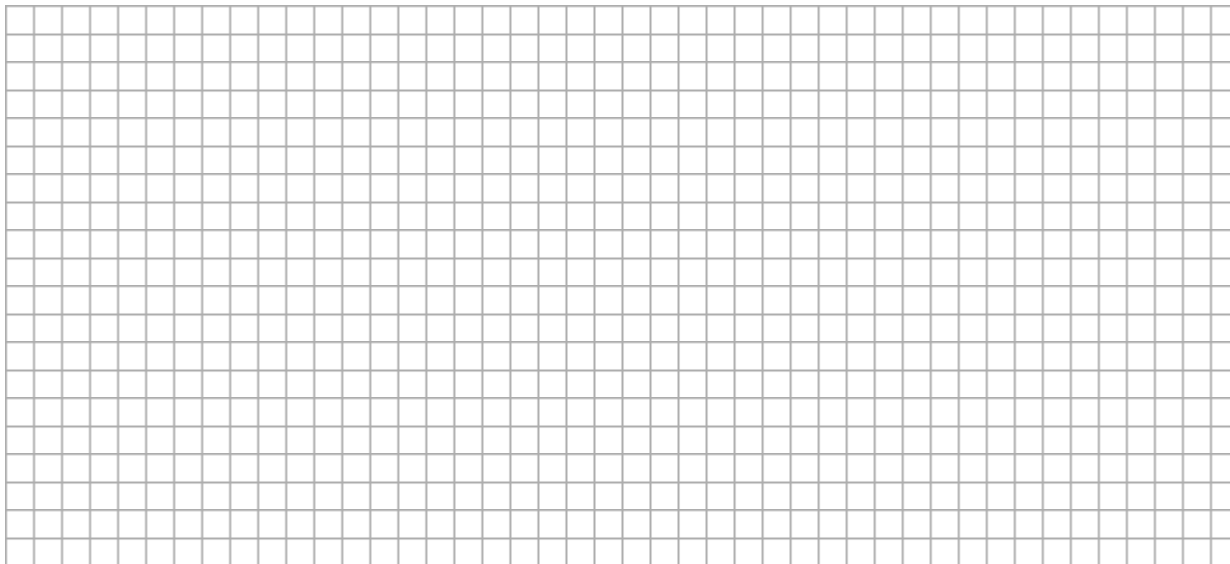
znajdź długości boków AC i BC .



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 17 – podobne zadanie na wykładzie 11 na Kursie Rocznym (poziom I)

Zadanie (1 pkt.)

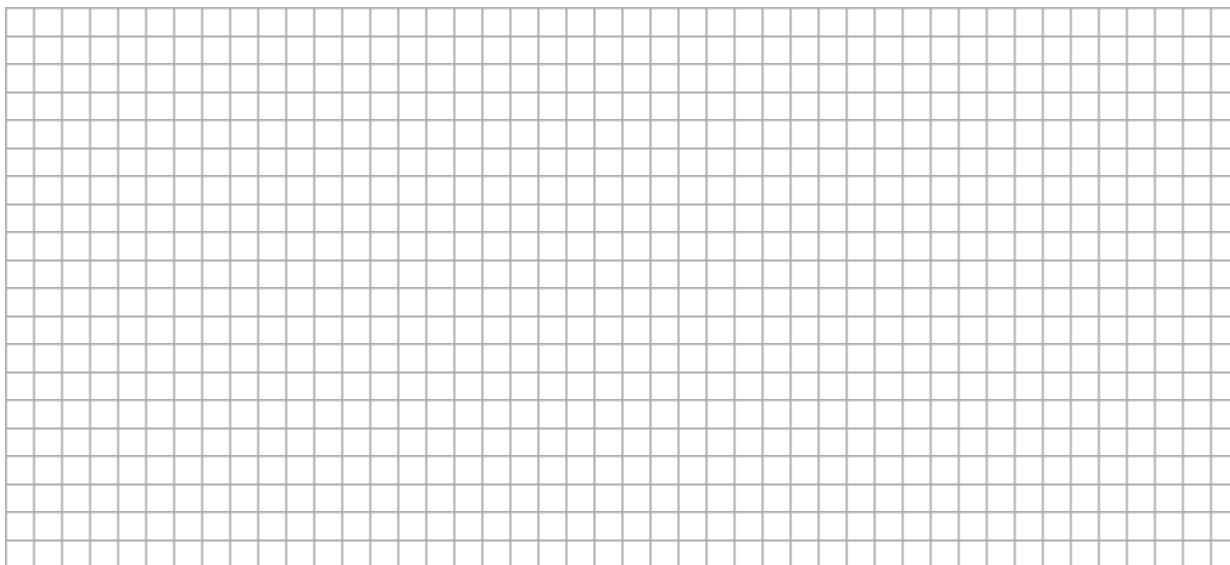
W trapez równoramienny o ramieniu 14 wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu dzieli ramię trapezu w stosunku 4:3. Oblicz promień tego okręgu.



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 17 – podobne zadanie na wykładzie 11 na Kursie Rocznym (poziom II)

Zadanie (1 pkt.)

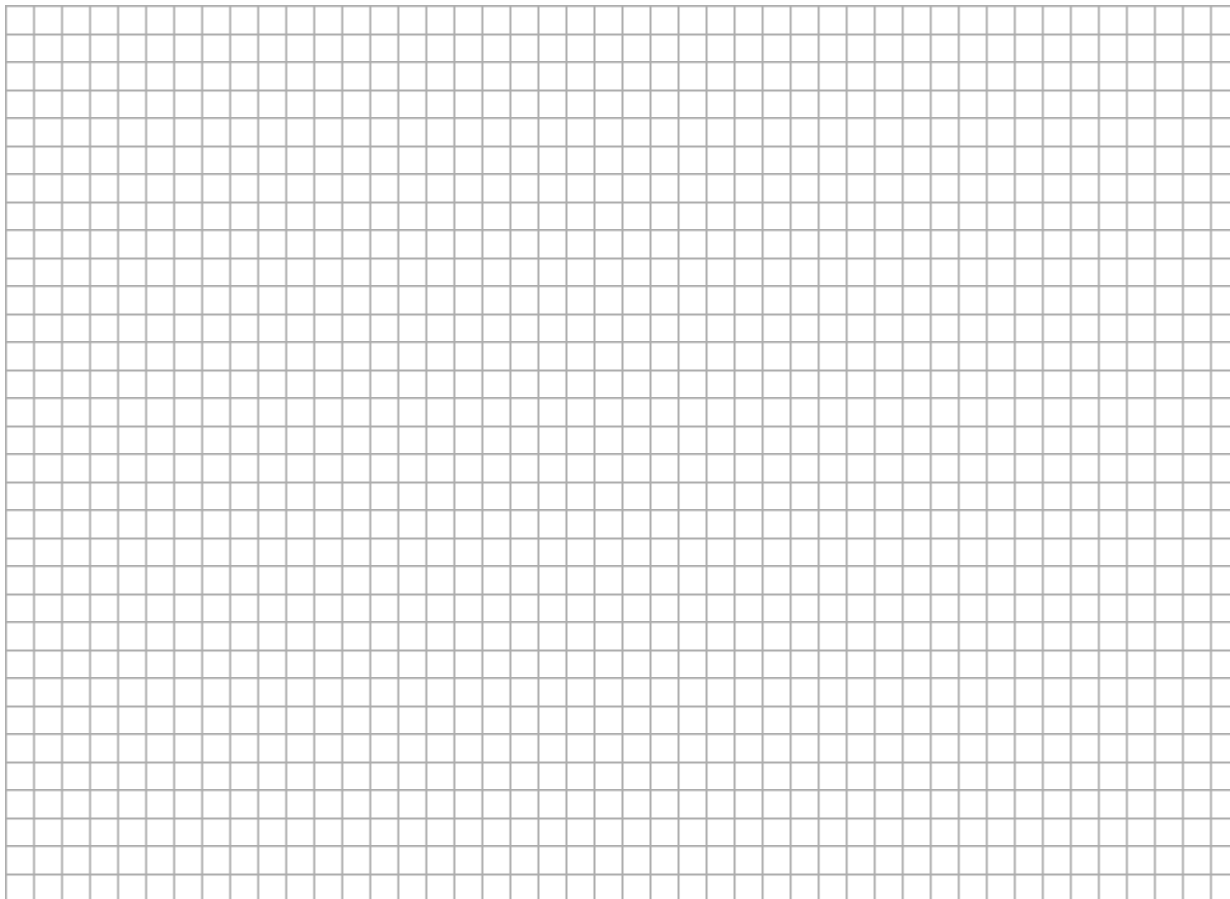
Na okręgu opisano trapez o obwodzie p . Jaka jest odległość między środkami jego ramion?



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 17 – podobne zadanie na tescie 8 na Kursie Rocznym

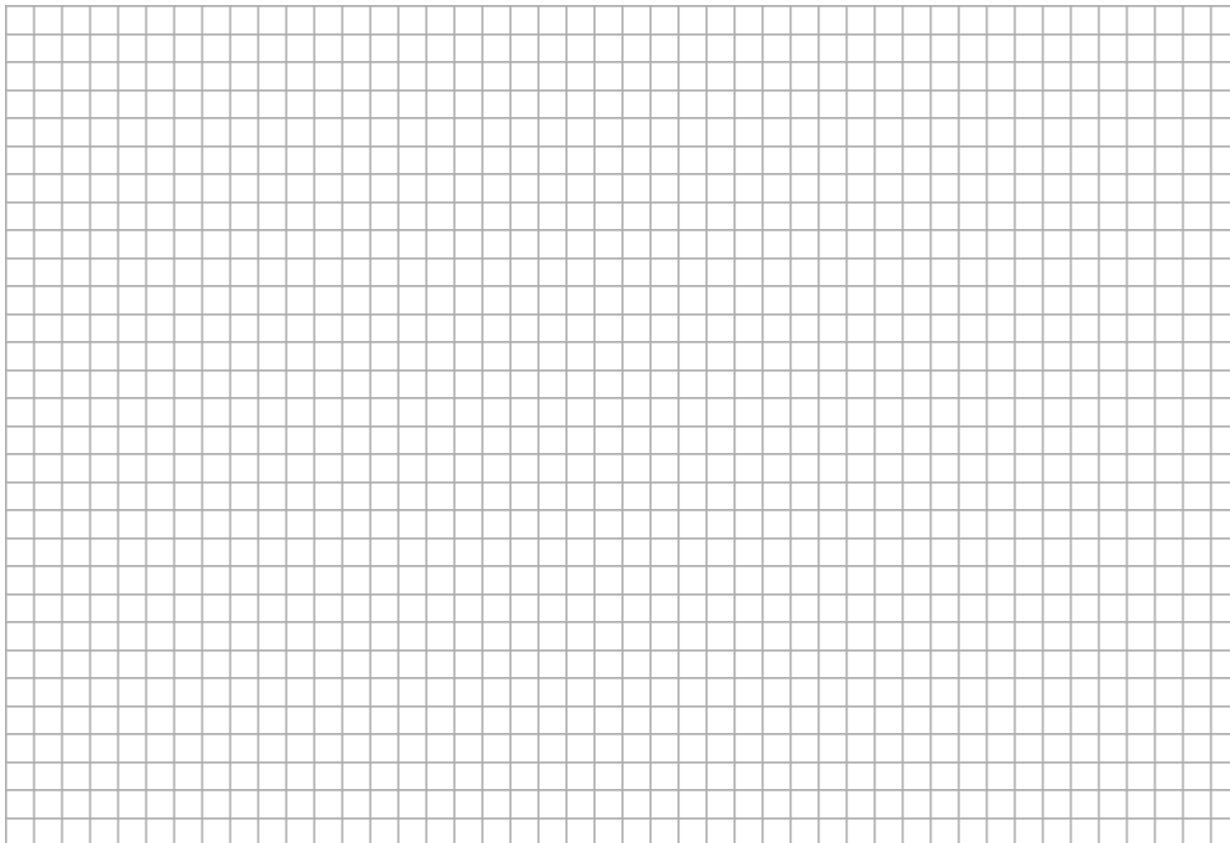
Zadanie (5 pkt.)

Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny. Punkt styczności dzieli ramię trapezu w stosunku 1 : 2. Oblicz pole trapezu.



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 18 – pytanie oryginalne (CKE)**Zadanie (7 pkt.)**

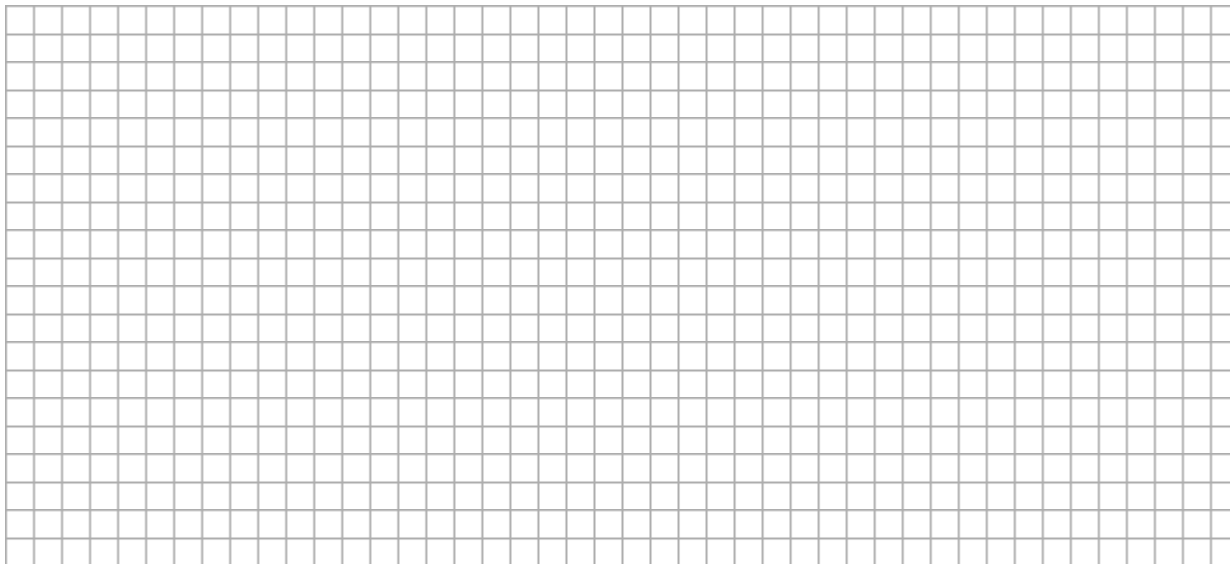
Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej 2 m^3 istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 18 – podobne zadania na wykładzie 15 na Kursie Rocznym (poziom II)

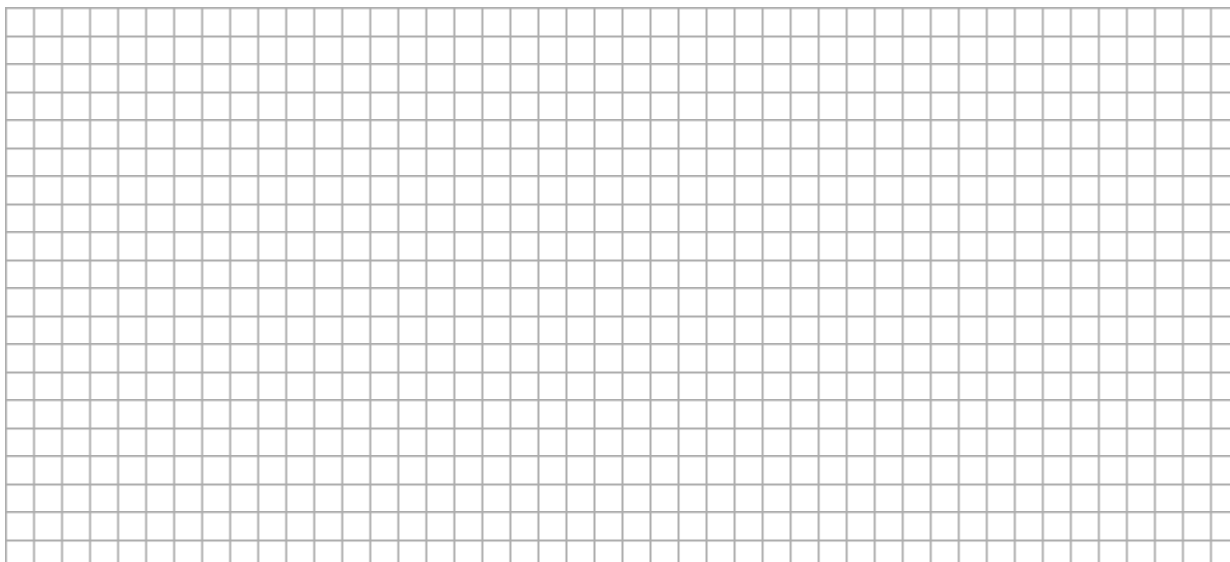
Zadanie (1 pkt.)

Z kawałka drutu długości 84 cm należy sporządzić model prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i największej objętości. Jakie powinny być wymiary tego prostopadłościanu?



Zadanie (1 pkt.)

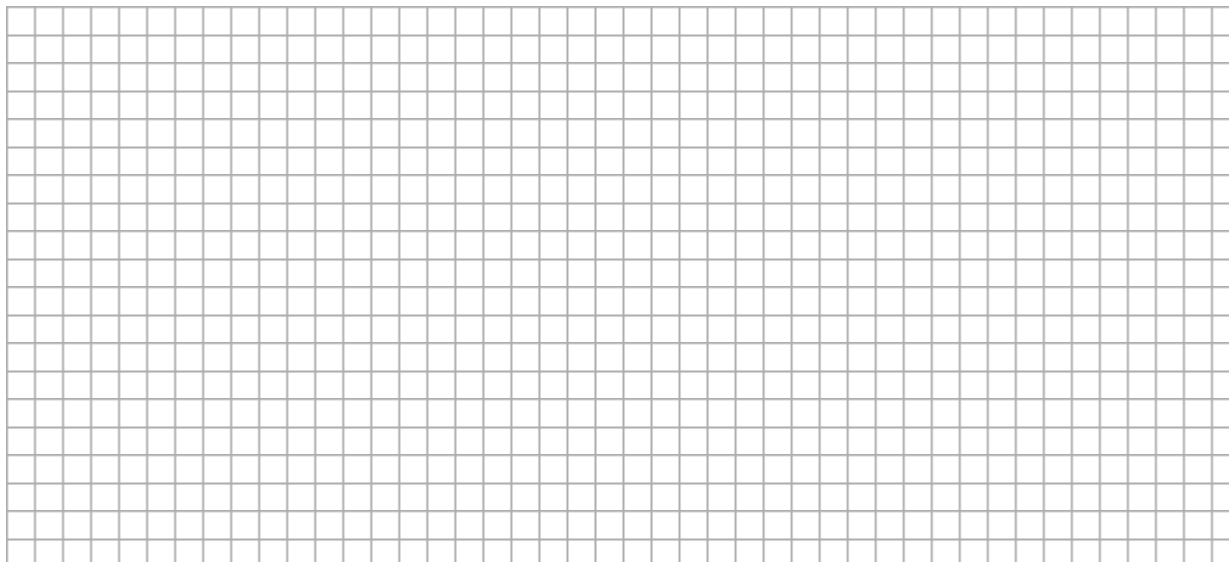
W kulę o promieniu R wpisano stożek o największej objętości. Jaka jest długość wysokości tego stożka?



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 18 – podobne zadania na wykładzie 19 na Kursie Rocznym (poziom I)

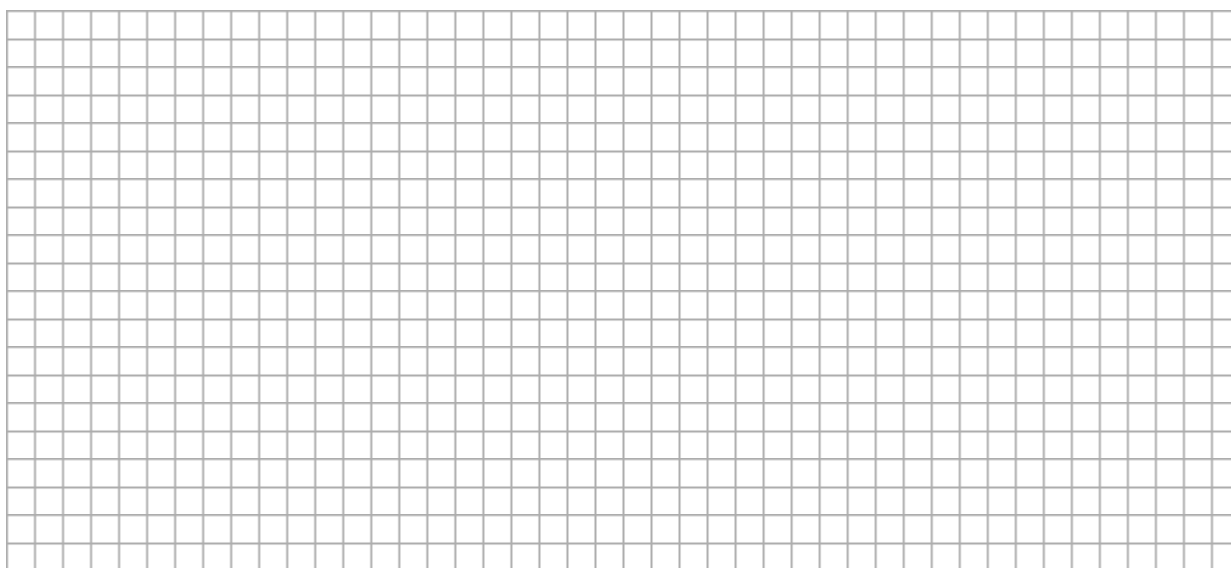
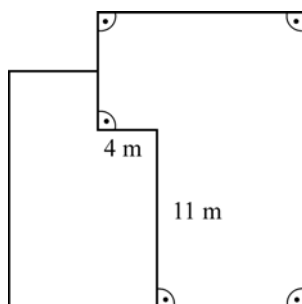
Zadanie (4 pkt.)

Rozłóż liczbę 8 na dwa takie składniki, aby suma ich sześciątów była największa.



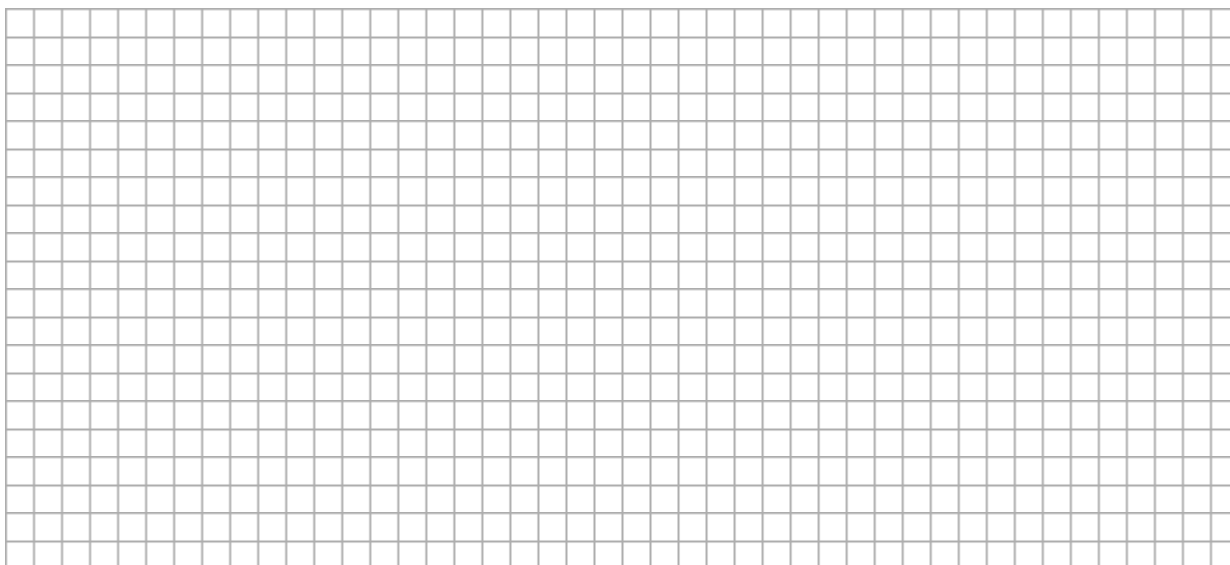
Zadanie (11 pkt.)

Przy ścianie budynku gospodarskiego chcemy wyznaczyć wybieg dla zwierząt o powierzchni $100m^2$. Kształt wybiegu pokazuje rysunek. Jakie wymiary powinien mieć ten wybieg, aby zużyć jak najmniej siatki na jego ogrodzenie?

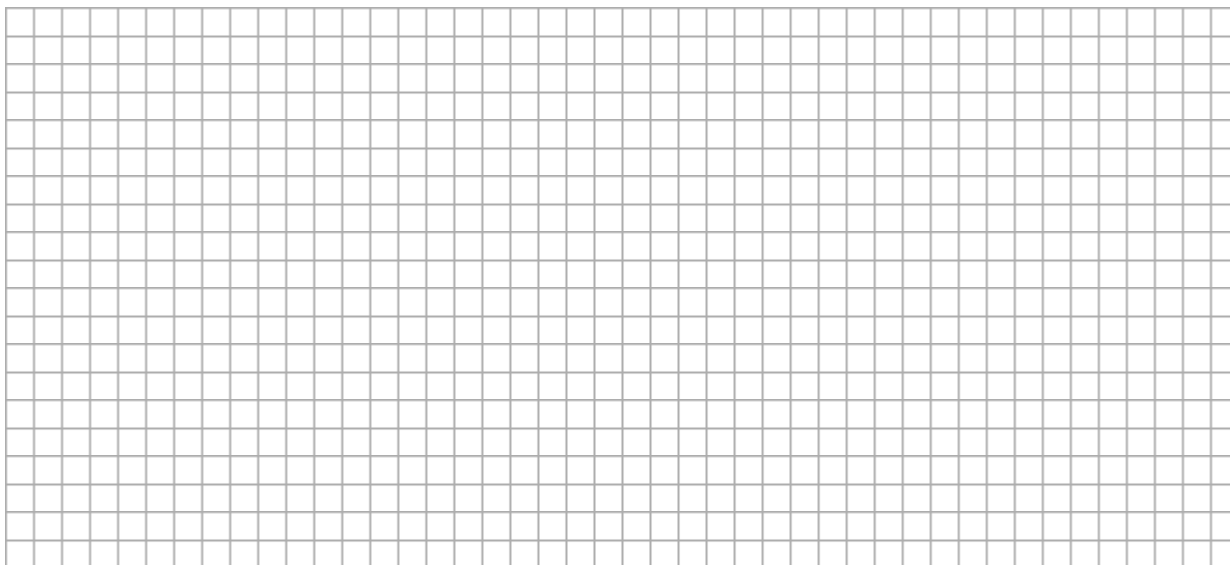


Zadanie (1 pkt.)

Oblicz stosunek promienia r podstawy walca do jego wysokości h , jeżeli wiadomo, że walec przy objętości $V = 1$ ma najmniejsze pole powierzchni.

**Zadanie (1 pkt.)**

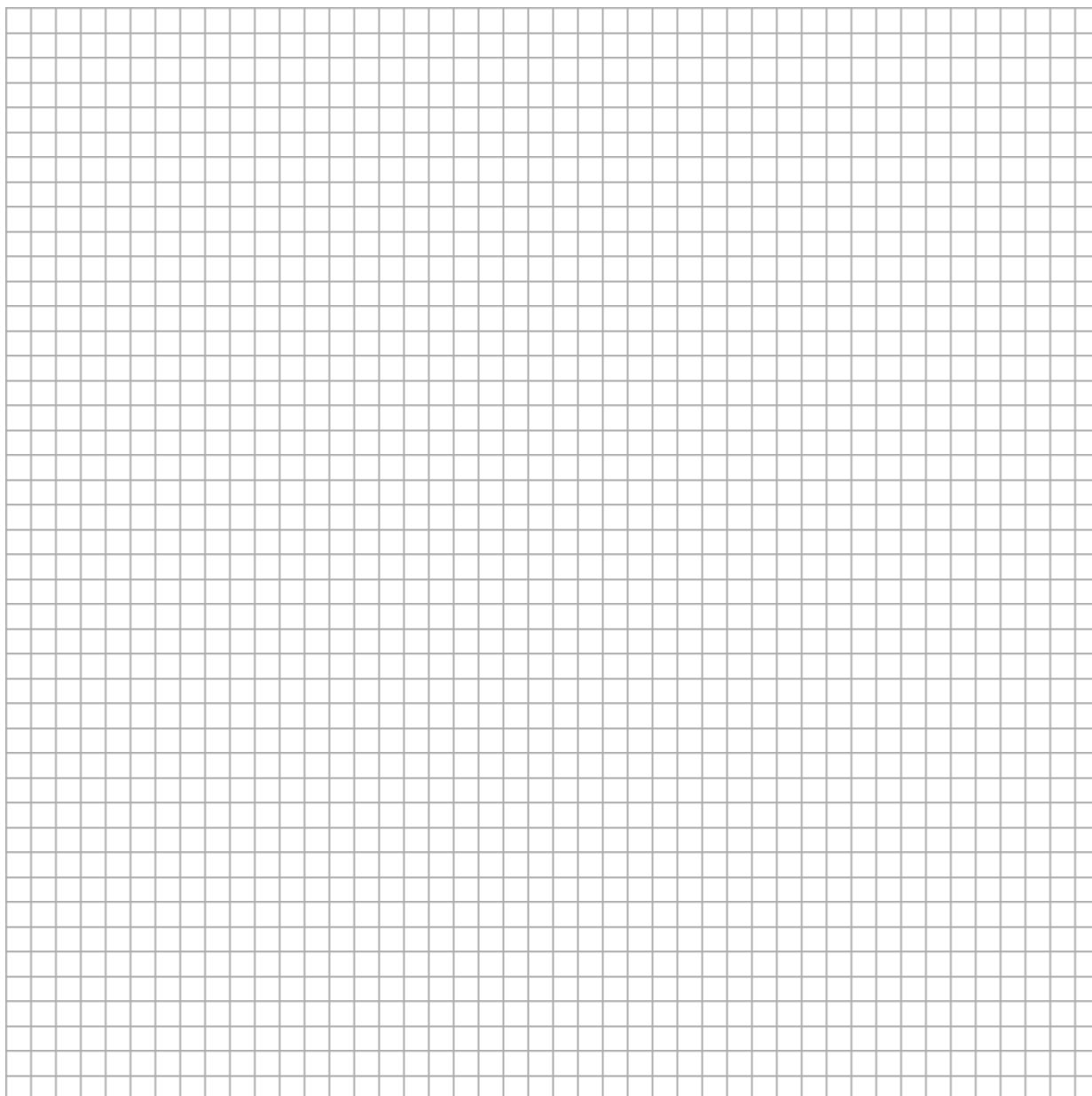
Zbadaj jaką wysokość musi mieć stożek opisany na kuli o promieniu R , aby jego objętość była najmniejsza.



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 18 – podobne zadanie na tescie 13 Kursie Rocznym

Zadanie (6 pkt.)

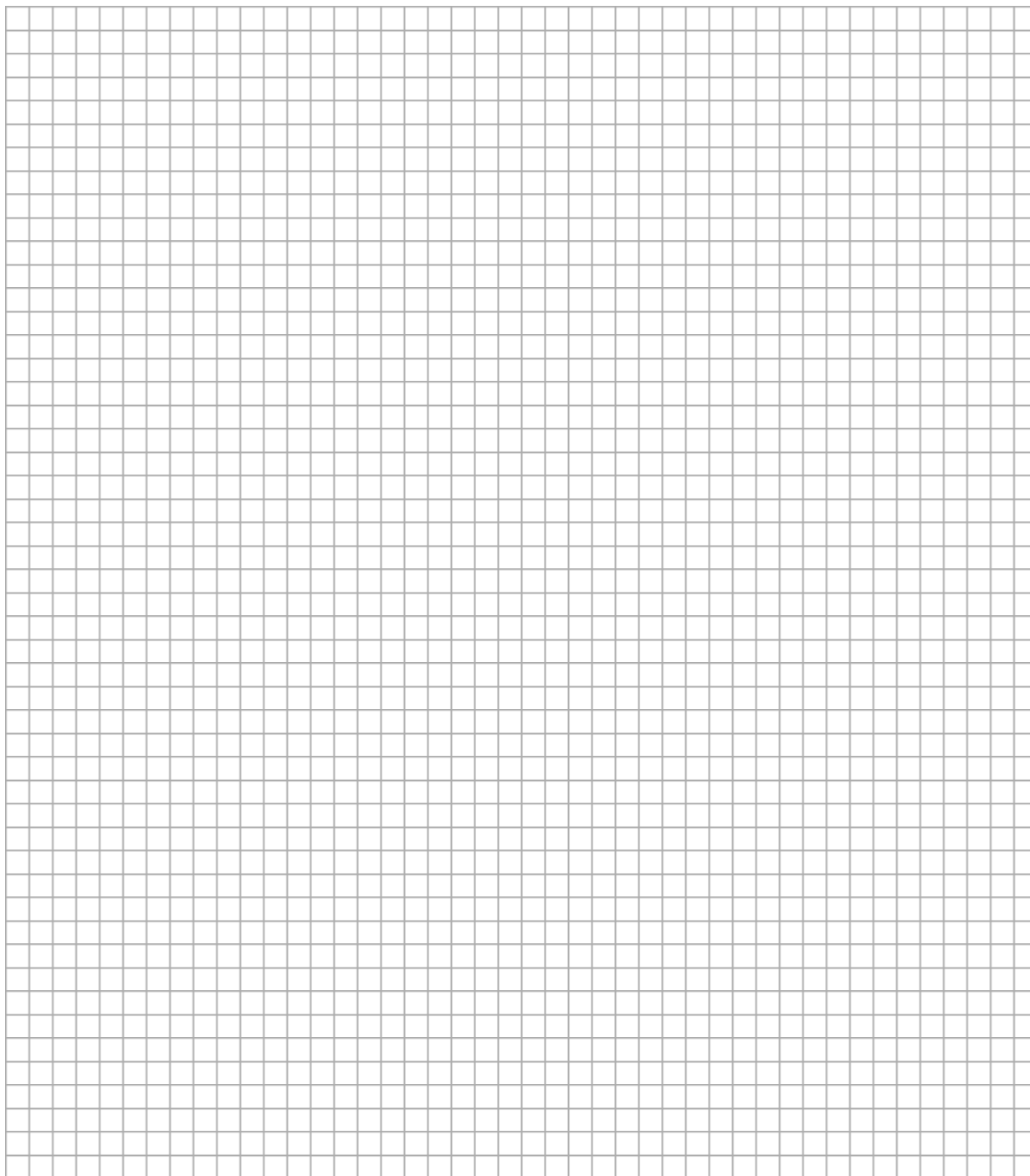
W kulę o danym promieniu R wpisano walec o największej powierzchni bocznej.
Wyznacz wymiary walca.



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 18 – podobne zadanie w pracy domowej 12 na Kursie Rocznym

Zadanie (4 pkt.)

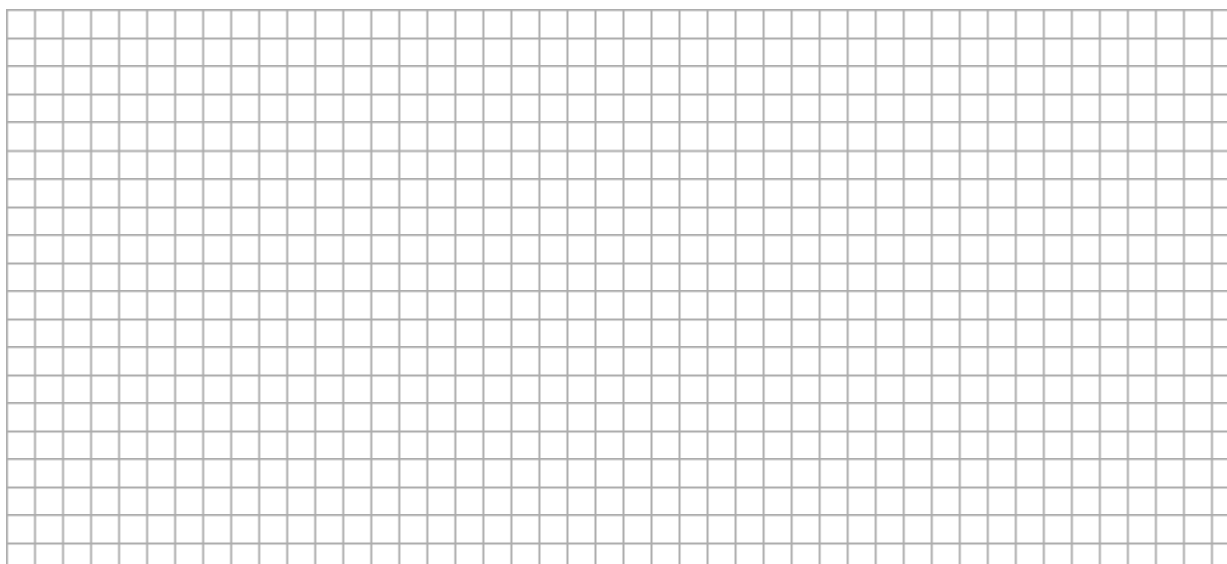
W kulę o promieniu R wpisano walec w ten sposób, że okręgi ograniczające podstawy walca zawierają się w powierzchni kuli. Wyznaczyć wymiary walca o największym polu powierzchni bocznej.



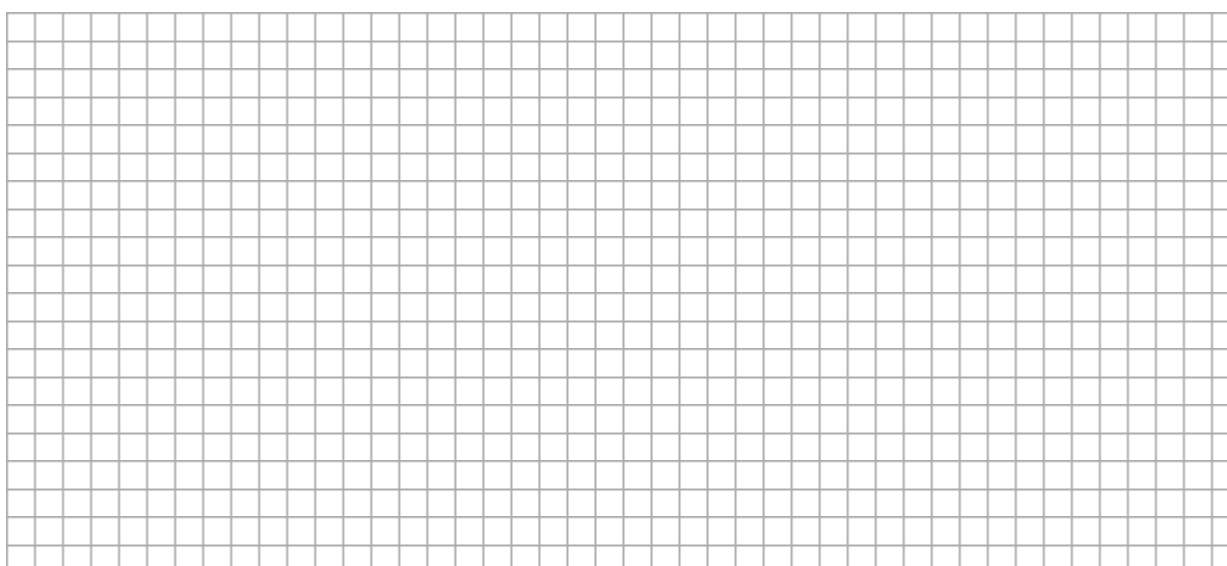
Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 19 – pytanie oryginalne (CKE)**Zadanie (7 pkt.)**

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym:

$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k - 2)$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których istnieje suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) .

**Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 19 – podobne zadanie na wykładzie 10 na Kursie Rocznym (poziom I)****Zadanie (5 pkt.)**

Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 1 + \frac{1}{x+2} + \left(\frac{1}{x+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x+2}\right)^3 + \dots$

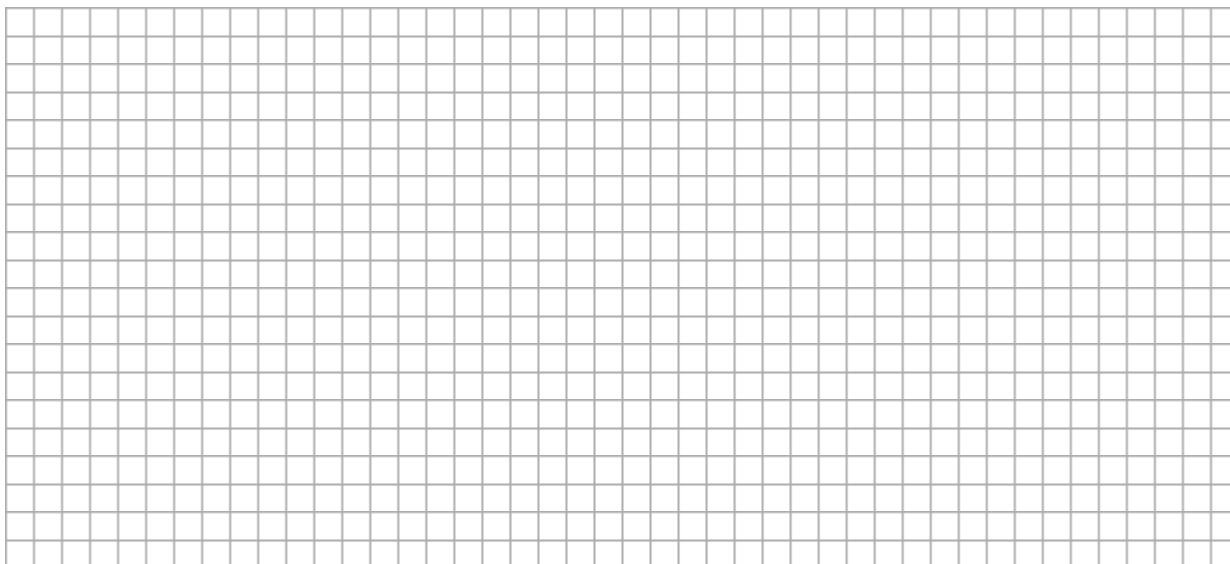


Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 19 – podobne zadania na wykładzie 10 na Kursie Rocznym (poziom II)

Zadanie (1 pkt.)

Dla jakich nieujemnych wartości parametru k granicą ciągu o wyrazie ogólnym

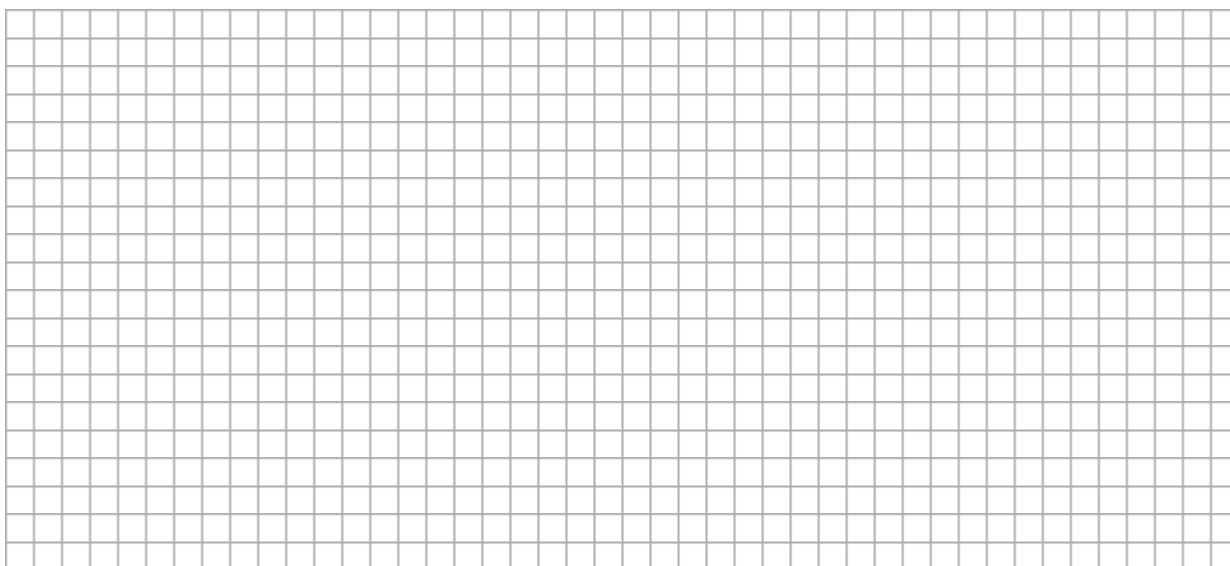
$$a_n = \frac{6 + k^2 n}{3 + kn}$$
 jest liczba 2?



Zadanie (1 pkt.)

Wyznacz zbiór wartości funkcji:

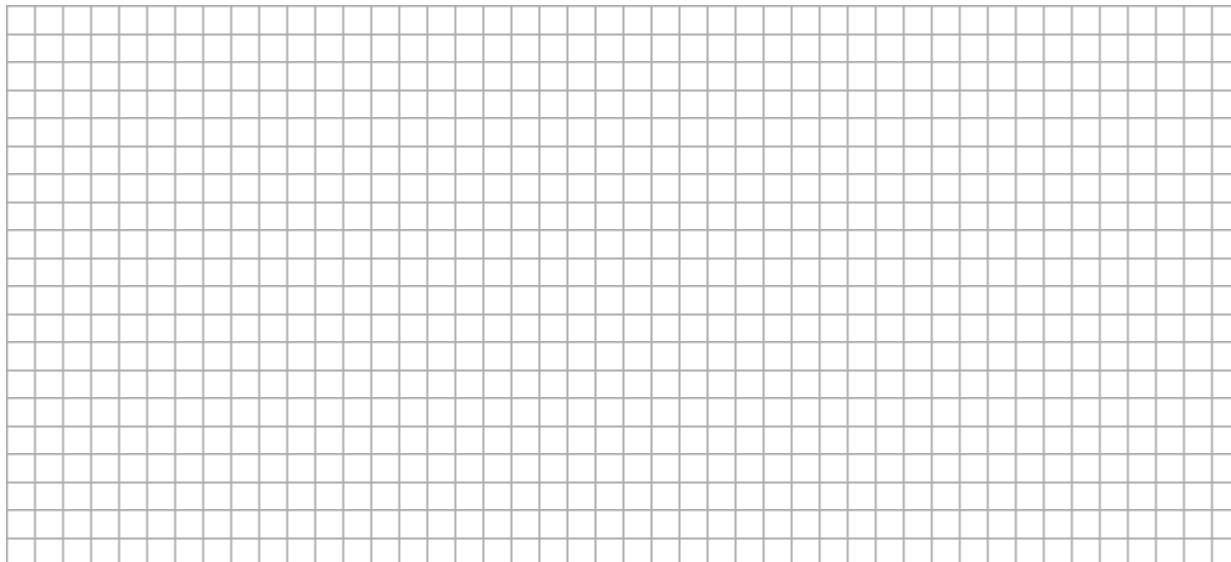
$$f(x) = \frac{x}{x-2} + \frac{x}{(x-2)^2} + \frac{x}{(x-2)^3} + \dots$$



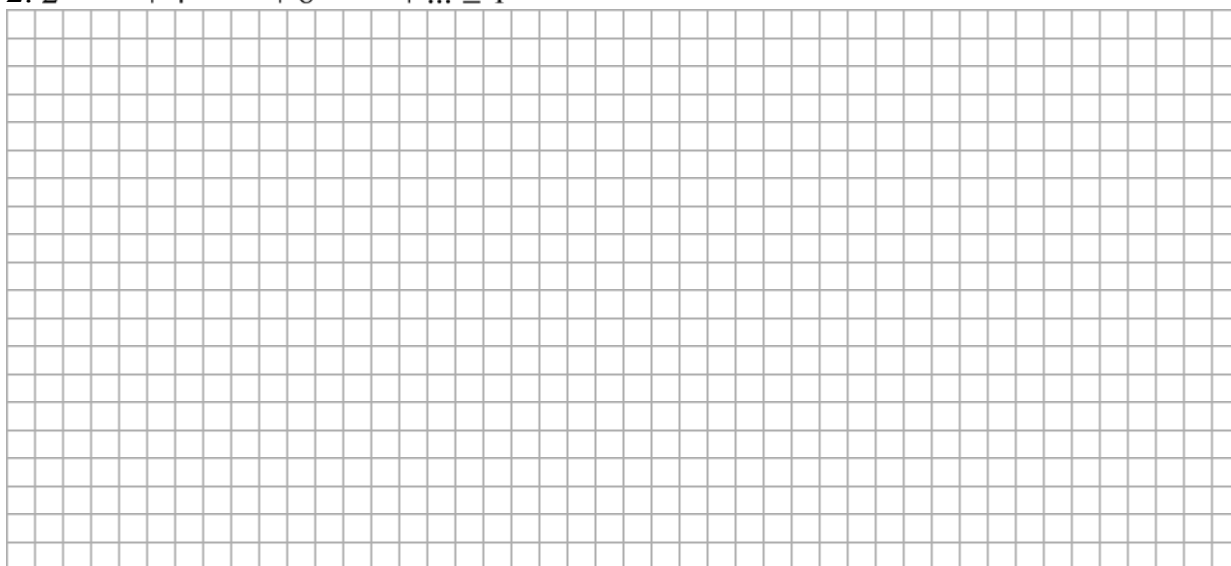
Zadanie (1 pkt.)

Rozwiąż nierówność:

1. $2 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^3 x + \dots \leq \frac{4}{3}$

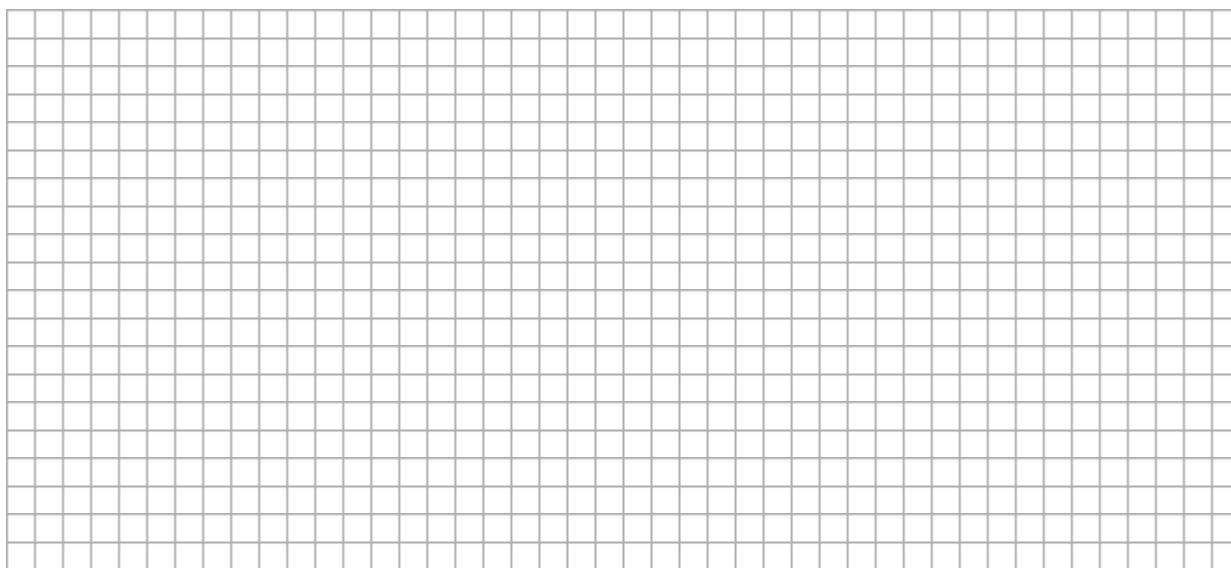


2. $2^{-\sin 3x} + 4^{-\sin 3x} + 8^{-\sin 3x} + \dots \leq 1$



Zadanie (1 pkt.)

Rozwiąż równanie $1 - \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^2x - \operatorname{tg}^3x + \dots = \frac{\sqrt{2} \cos x}{2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

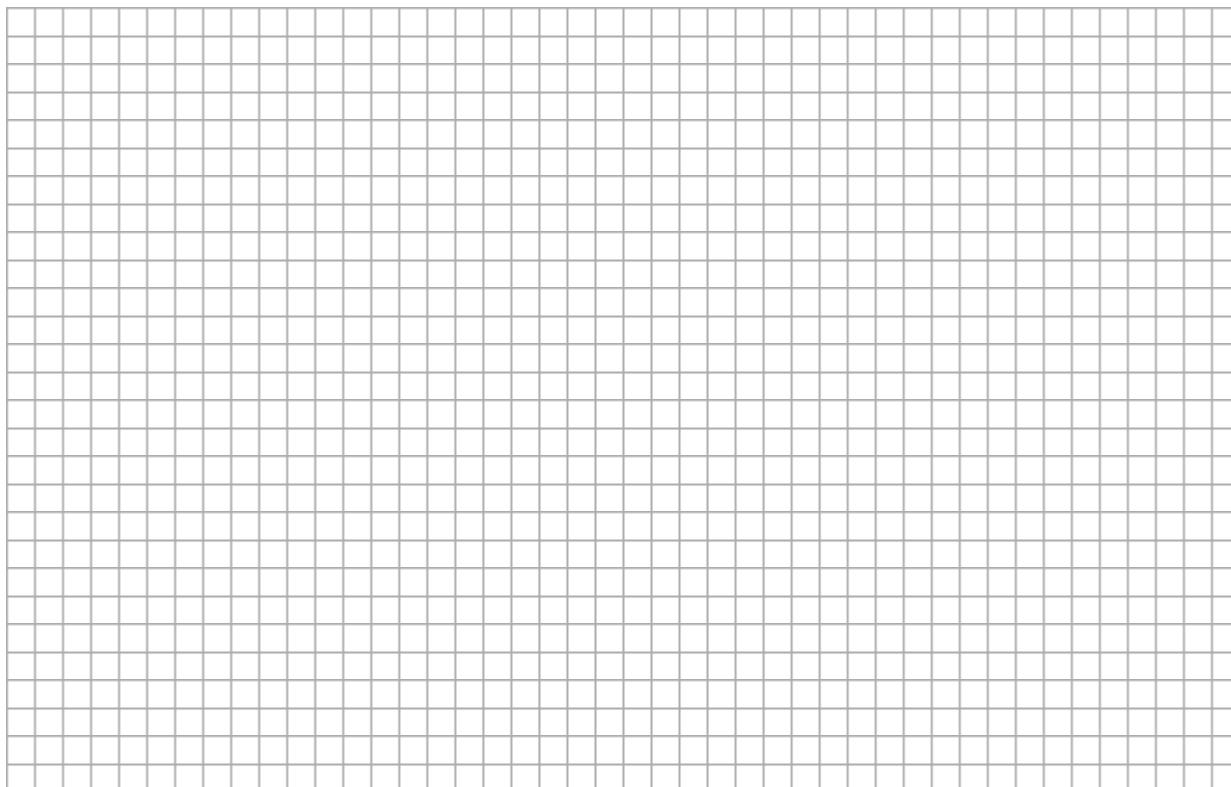


Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 19 – podobne zadanie na wykładzie 9 na Kurse Rocznym (poziom II)

Zadanie (1 pkt.)

Rozwiąż:

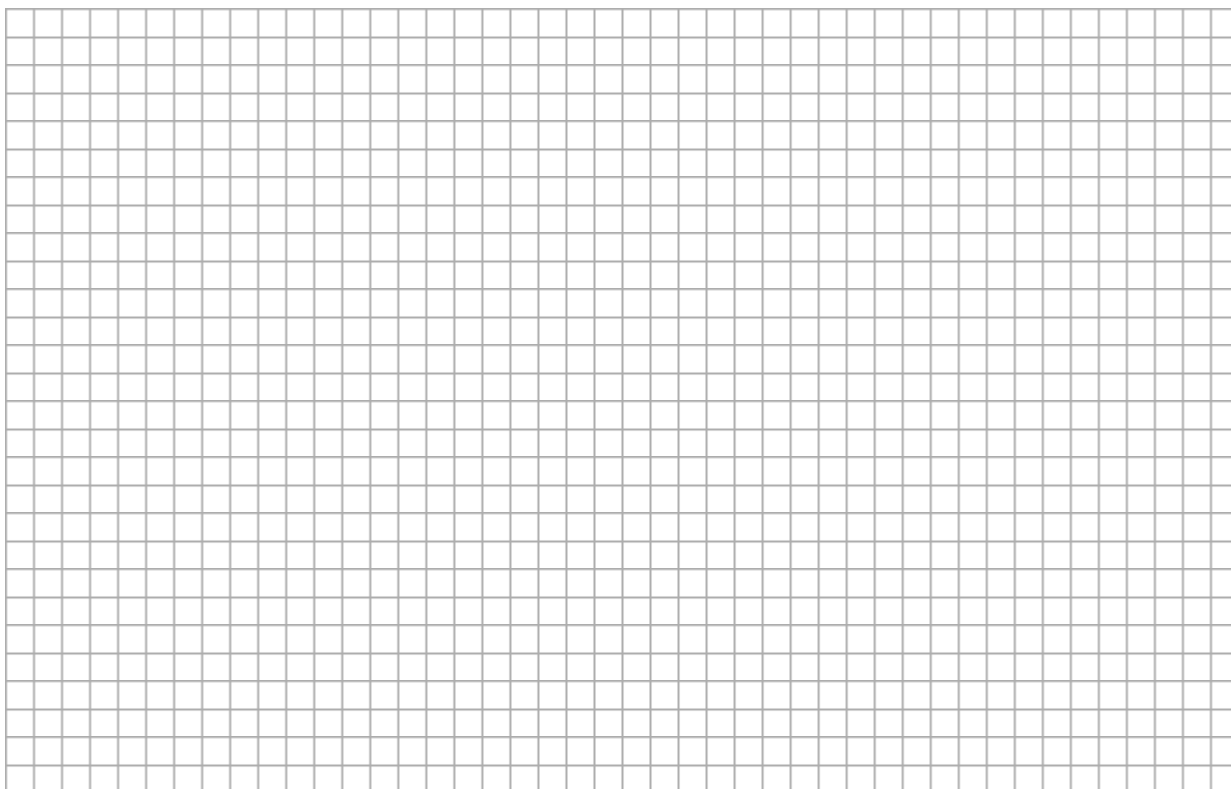
1. $\log(3x + 4) + \log(x - 8) = 2$



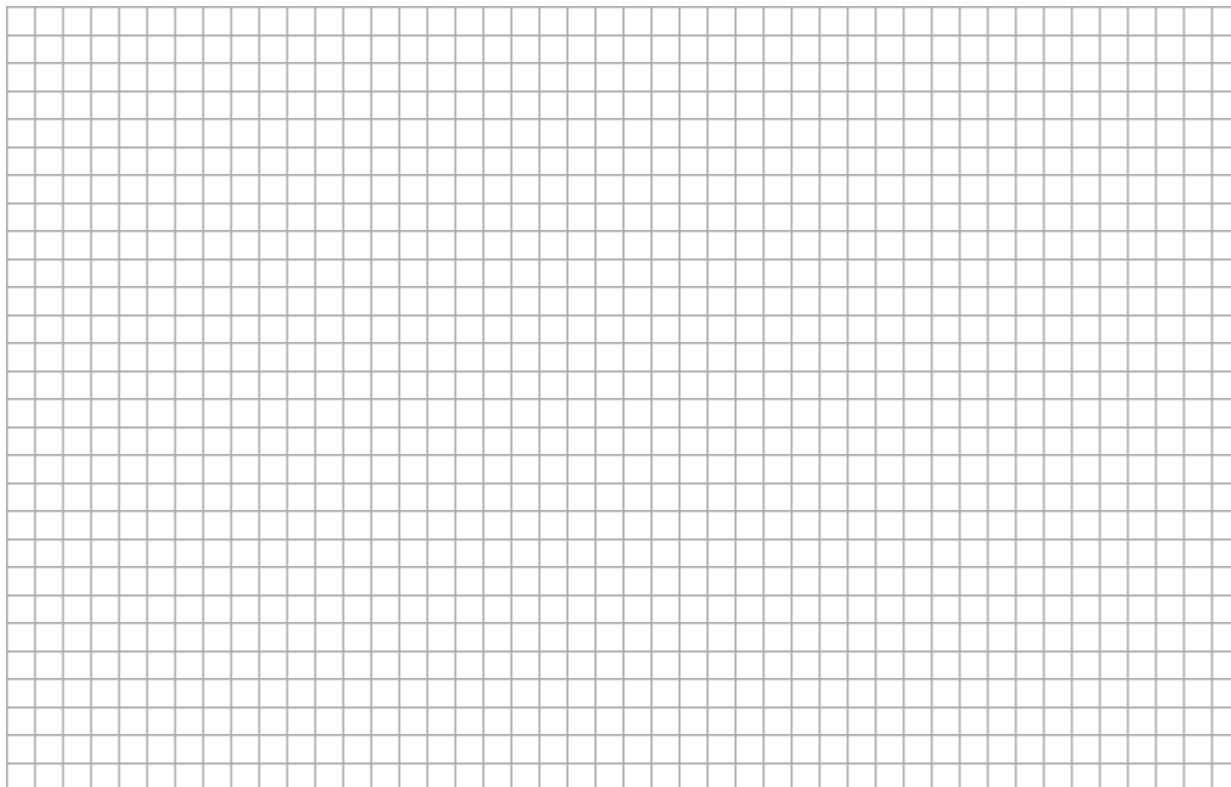
$$2. 2(\log_2 x)^2 - 3\log_2 \frac{x}{4} - 11 = 0$$



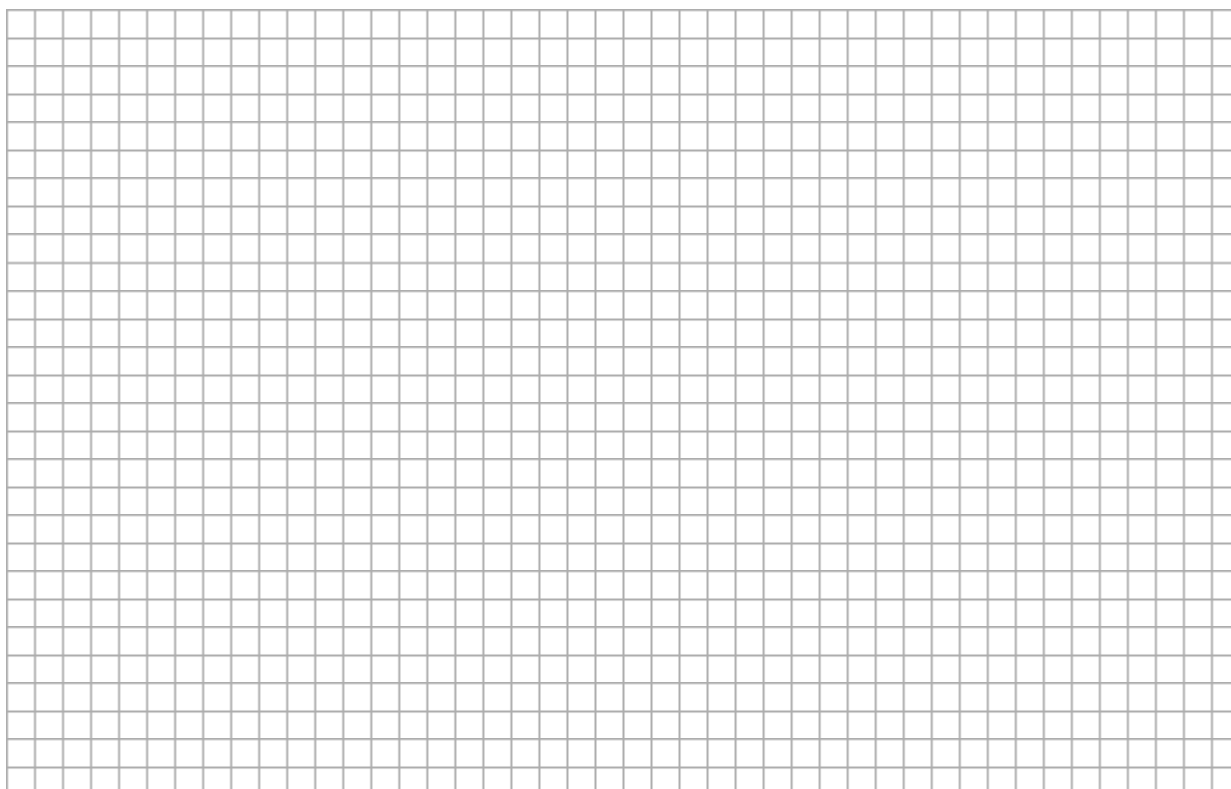
$$3. x^{\log_3 3x} = 9$$



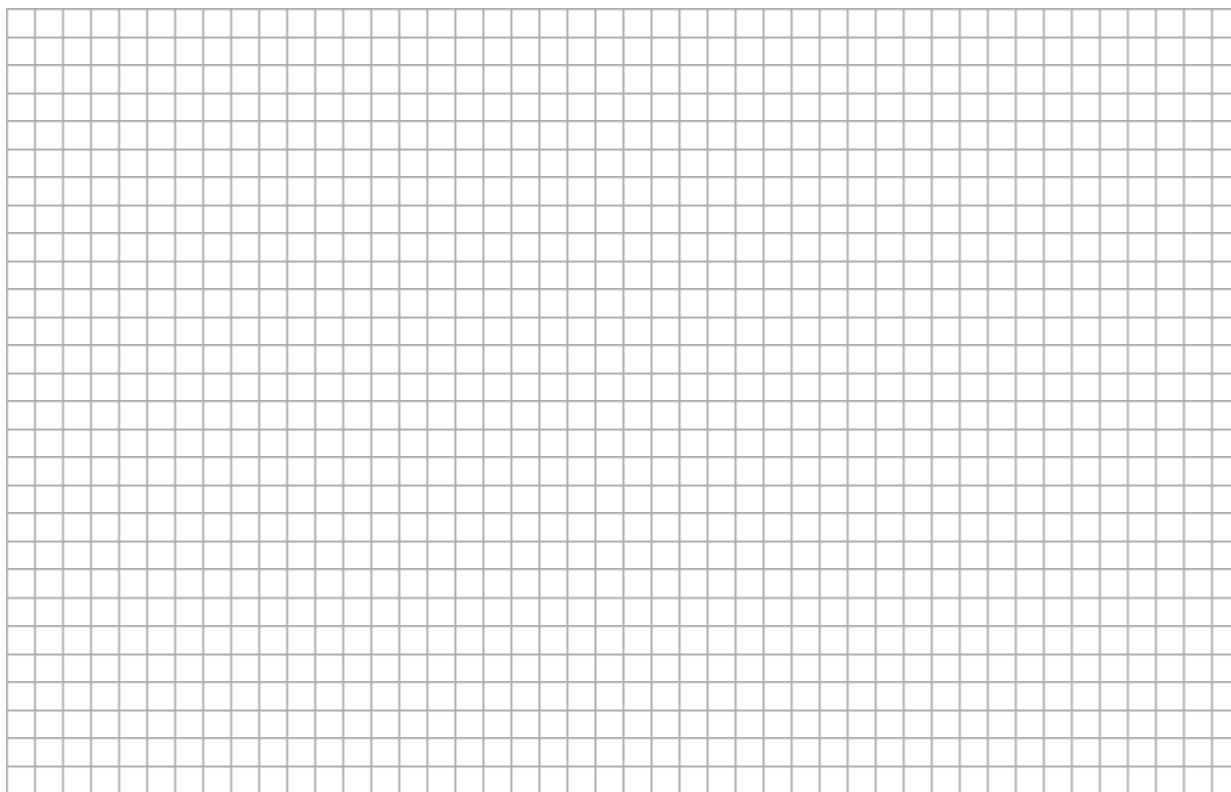
$$4. \log_{0,5}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \log_{0,5}(x - 1) \geq 1$$



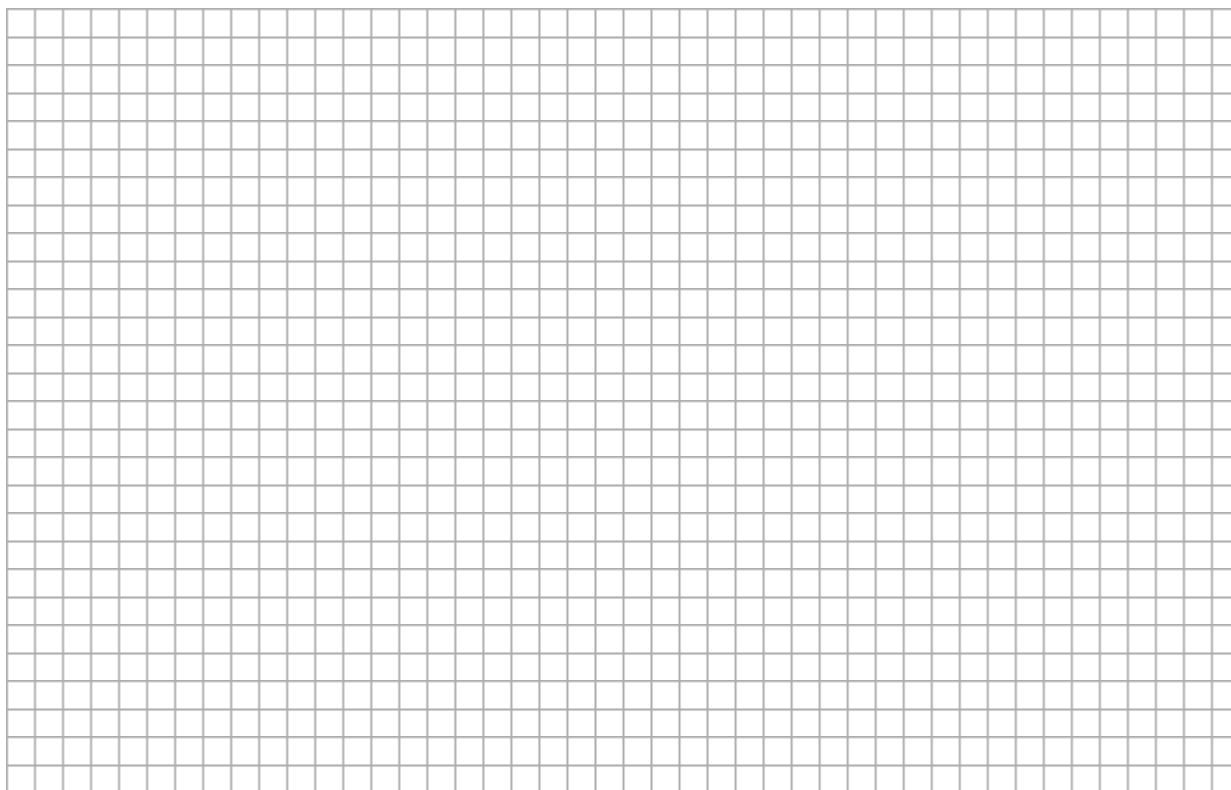
$$5. \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) \geq -2$$



$$6. \log_{2x}\left(\frac{32}{x} - 16x\right) = \frac{1}{\log_{56}(2x)} - 3$$



$$7. \log_{|x|}(\sqrt{9-x^2} - x - 1) \geq 1$$

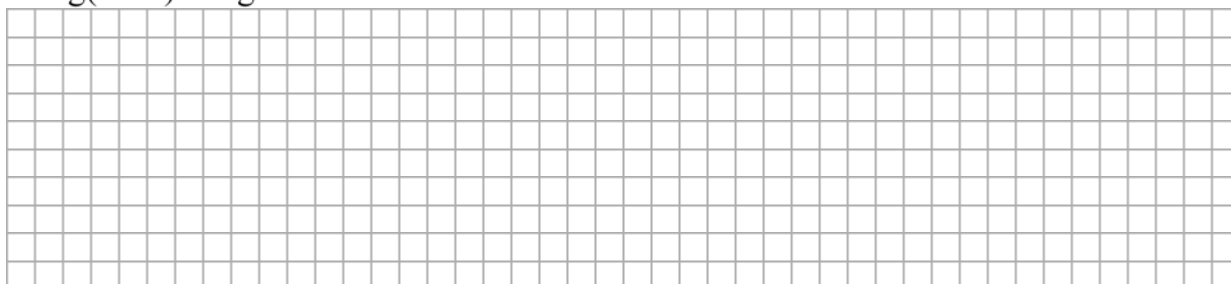


Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 19 – podobne zadanie na wykładzie 18 na Kursie Rocznym (poziom I)

Zadanie (1 pkt.)

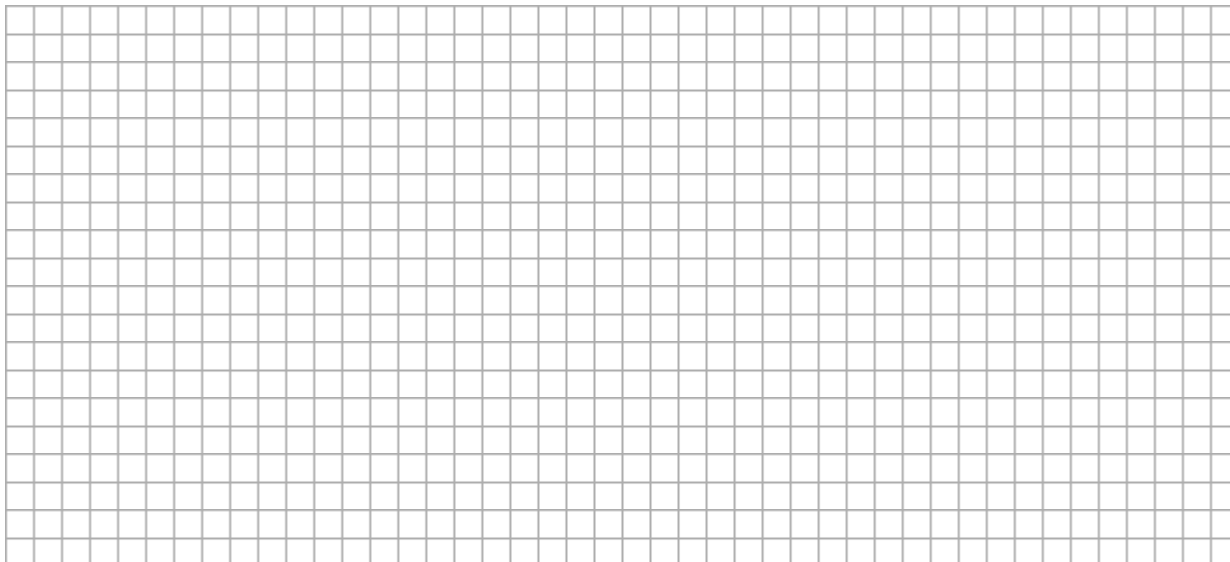
Rozwiąż nierówności:

1. $\log(x+1) - \log x < 1$



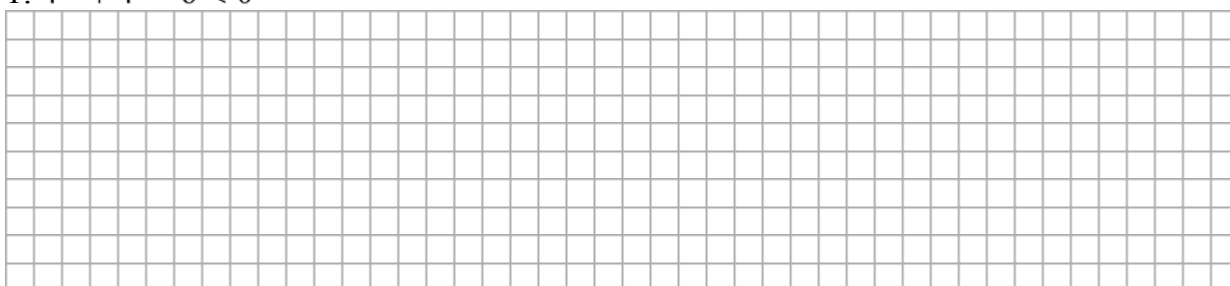
Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 20 – pytanie oryginalne (CKE)**Zadanie (4 pkt.)**

Dane są funkcje $f(x) = 3^{x^2-5x}$ i $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$. Oblicz, dla których argumentów x wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g .

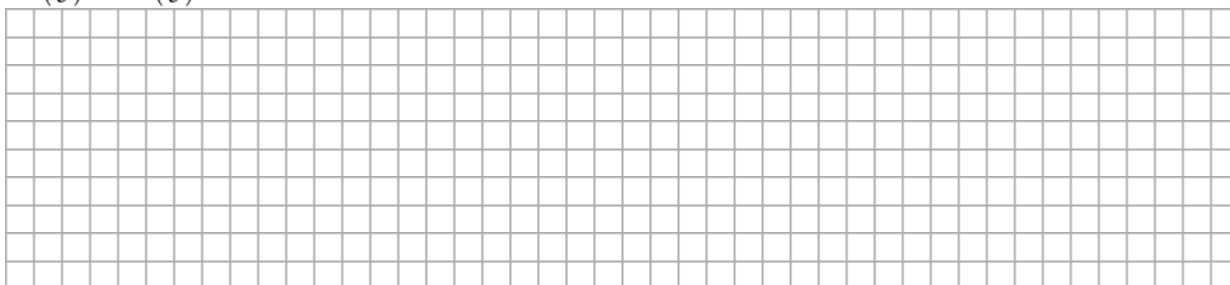
**Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 20 – podobne zadanie na wykładzie 18 na Kursie Rocznym (poziom I)****Zadanie (1 pkt.)**

Rozwiąż nierówności:

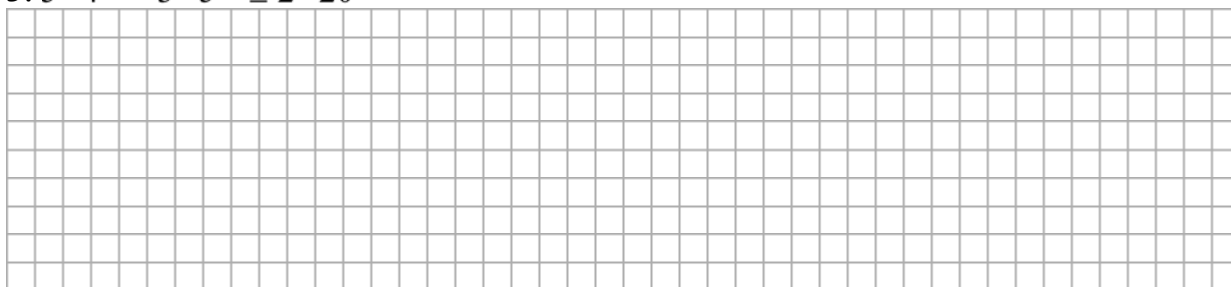
1. $4^{2x} + 4^x - 6 < 0$



2. $\left(\frac{1}{5}\right)^x - 2\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \leq -225$



$$3 \cdot 5 \cdot 4^{2x} - 3 \cdot 5^{2x} \geq 2 \cdot 20^x$$

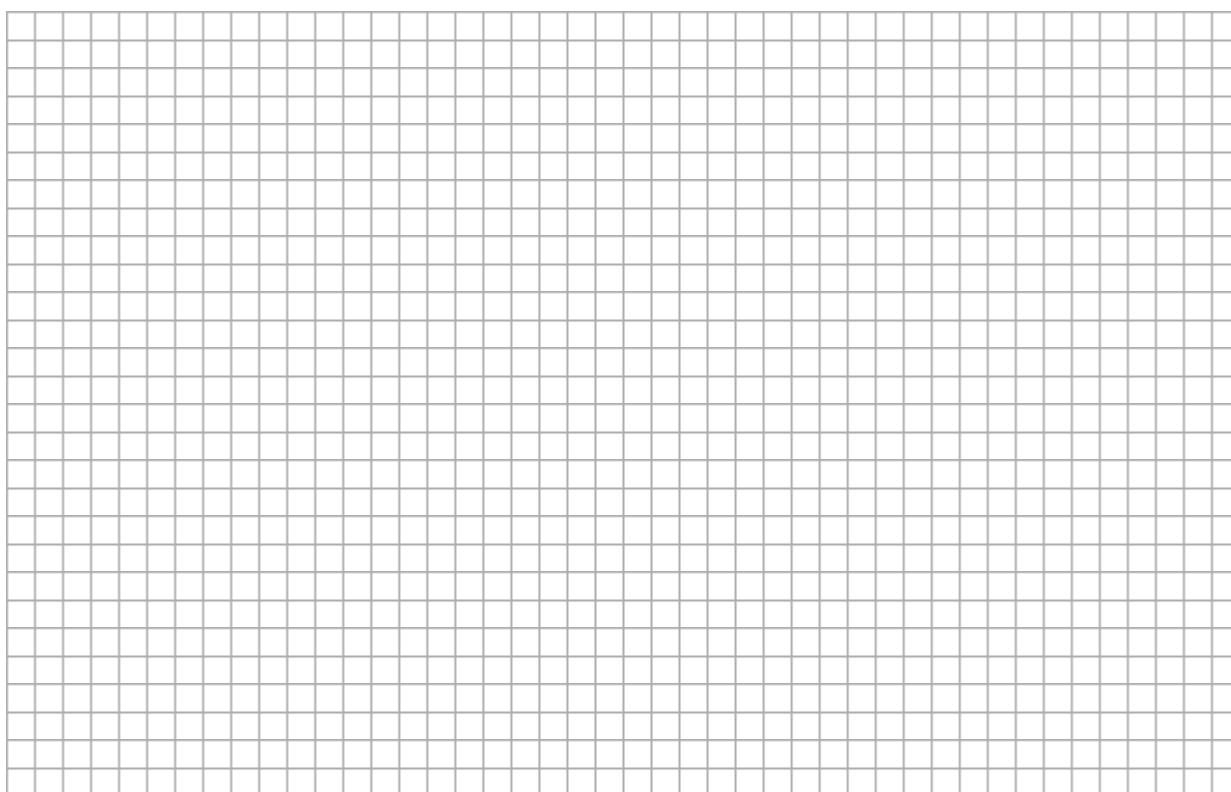


Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 20 – podobne zadanie na wykładzie 9 na Kursie Rocznym (poziom II)

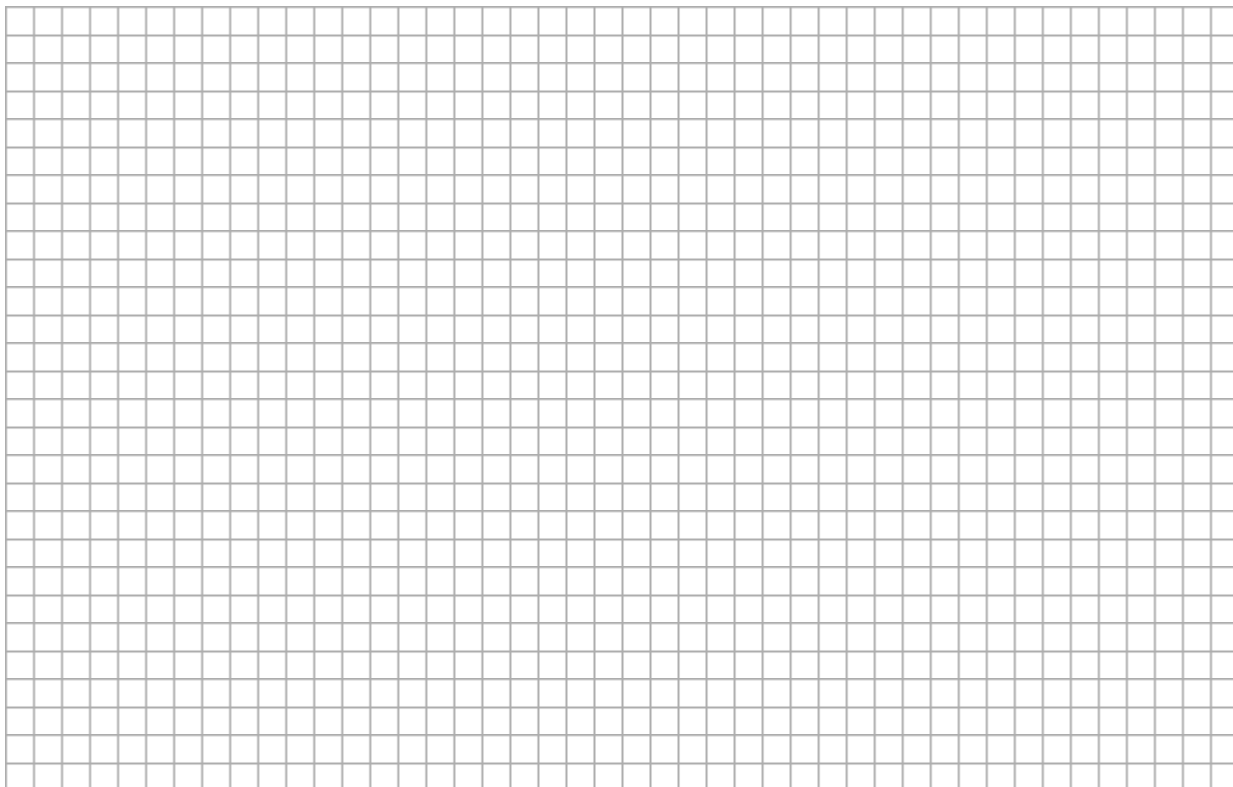
Zadanie (1 pkt.)

Rozwiąż:

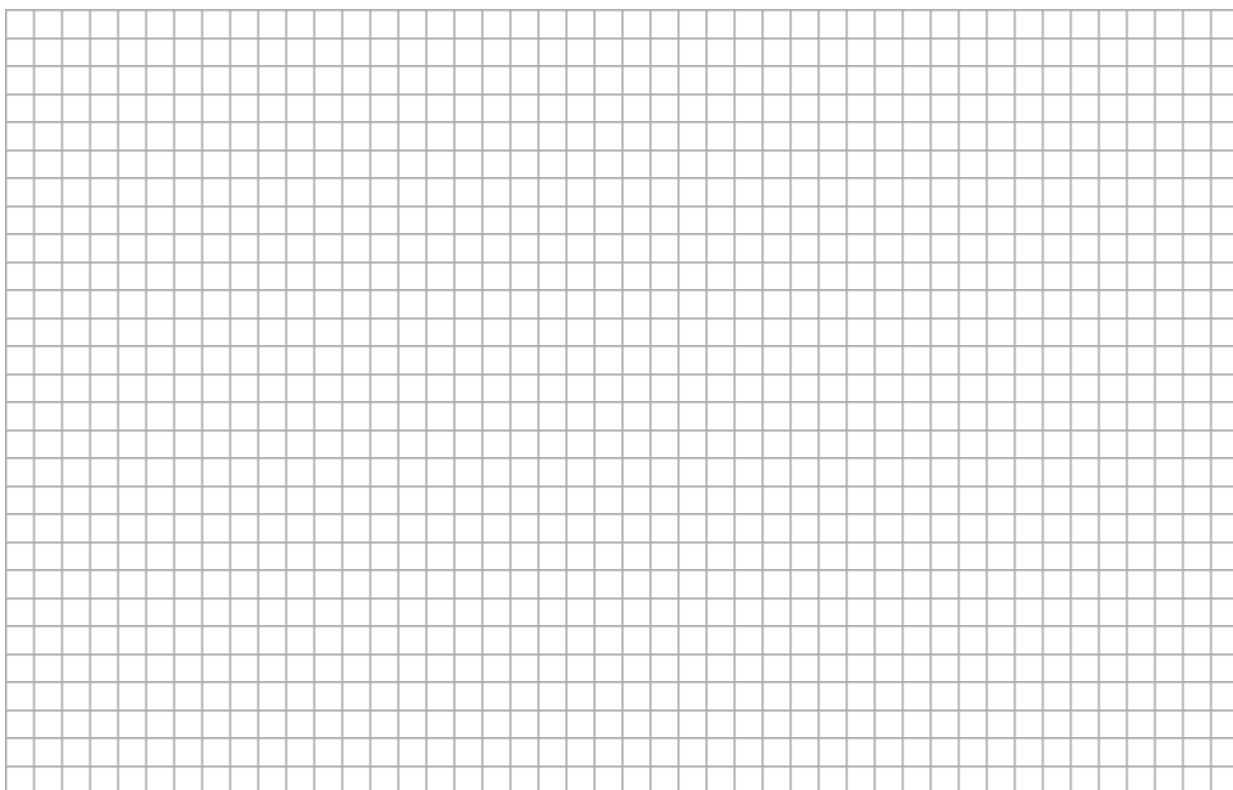
$$1. 4^{2x-2} = 128^{3x+6} \cdot \left(\frac{16}{2^x}\right)^{2x^2+4x}$$



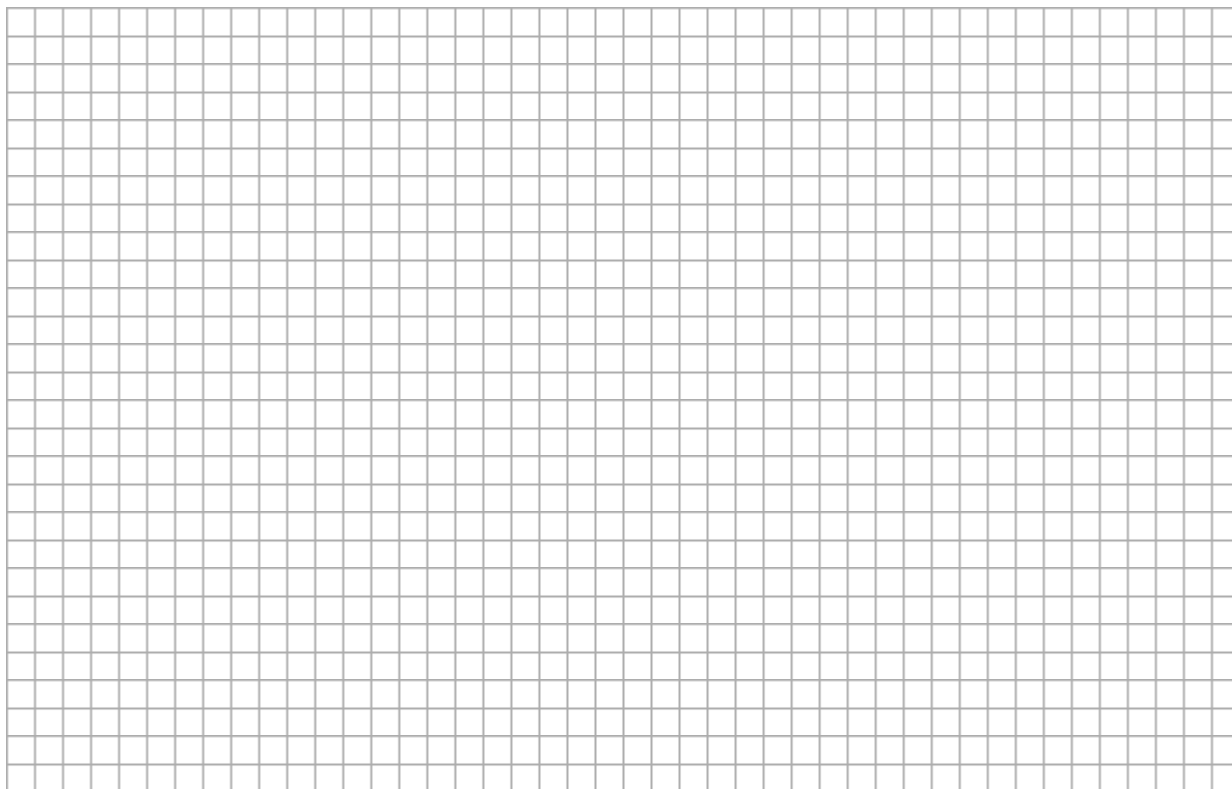
$$2. 2 \cdot 5^{2|x-2|+1} - 8 \cdot 25^{|x-2|} - 50 = 0$$



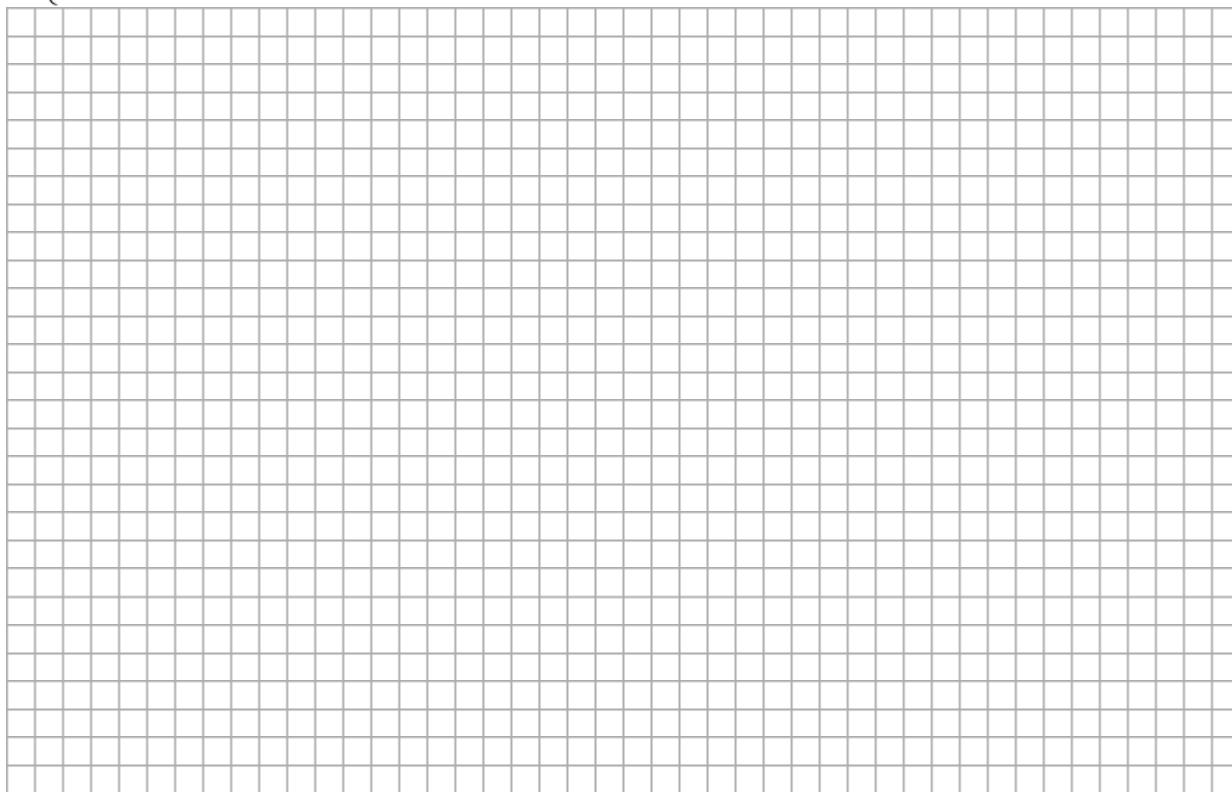
$$3. 9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}$$



$$4. \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x - 10 = 0$$



$$5. \begin{cases} y \cdot x^2 + 7x + 12 = 1 \\ x + y = 6 \end{cases}$$



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 21 – pytanie oryginalne (CKE)**Zadanie (5 pkt.)**

W trakcie badania przebiegu zmienności funkcji ustalono, że funkcja f ma następujące własności:

- jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
- f jest funkcją nieparzystą,
- f jest funkcją ciągłą,

oraz:

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-8, -3),$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (-3, -1),$$

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-1, 0),$$

$$f'(-3) = f'(-1) = 0,$$

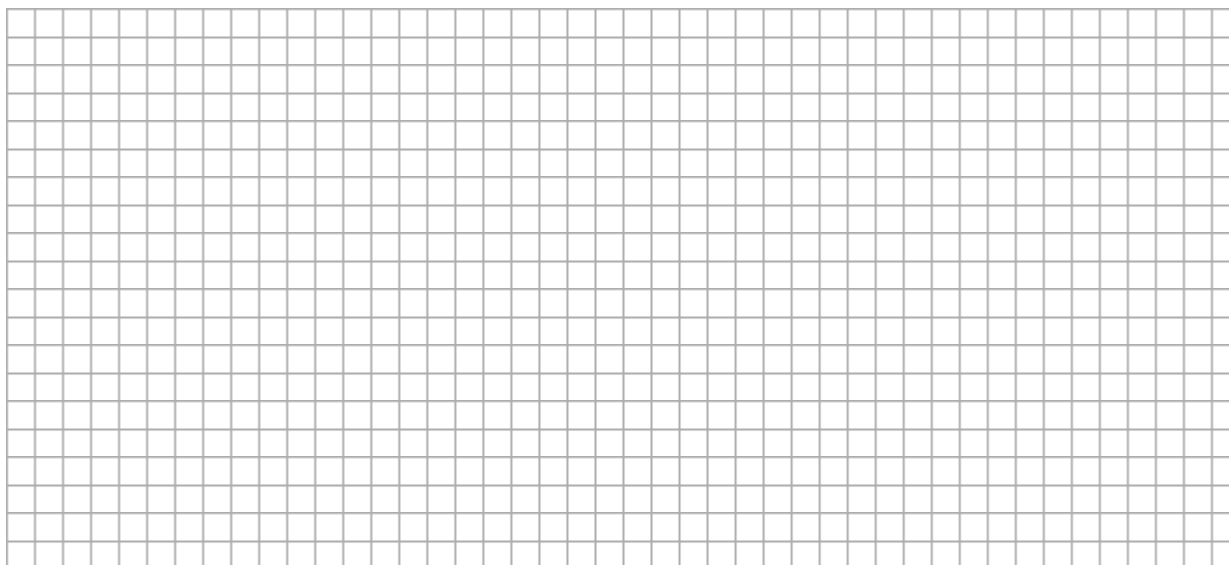
$$f(-8) = 0,$$

$$f(-3) = -2,$$

$$f(-2) = 0,$$

$$f(-1) = 1.$$

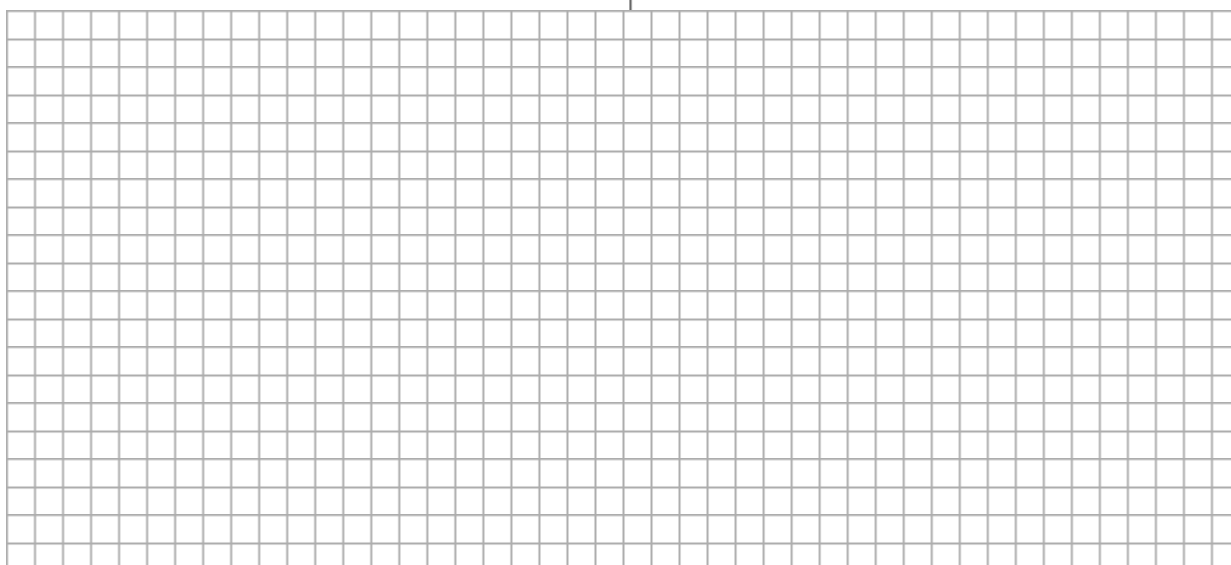
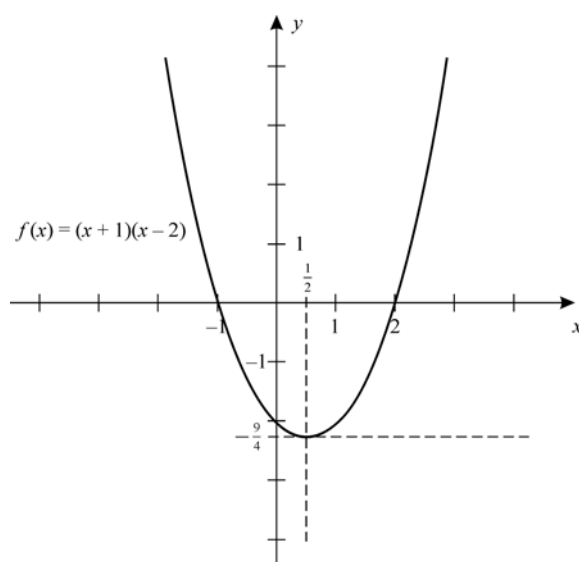
W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie naszkicuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -8, 8 \rangle$, wykorzystując podane powyżej informacje o jej własnościach.



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 21 – podobne zadanie na wykładzie 19 na Kursie Rocznym (poziom I)

Zadanie (4 pkt.)

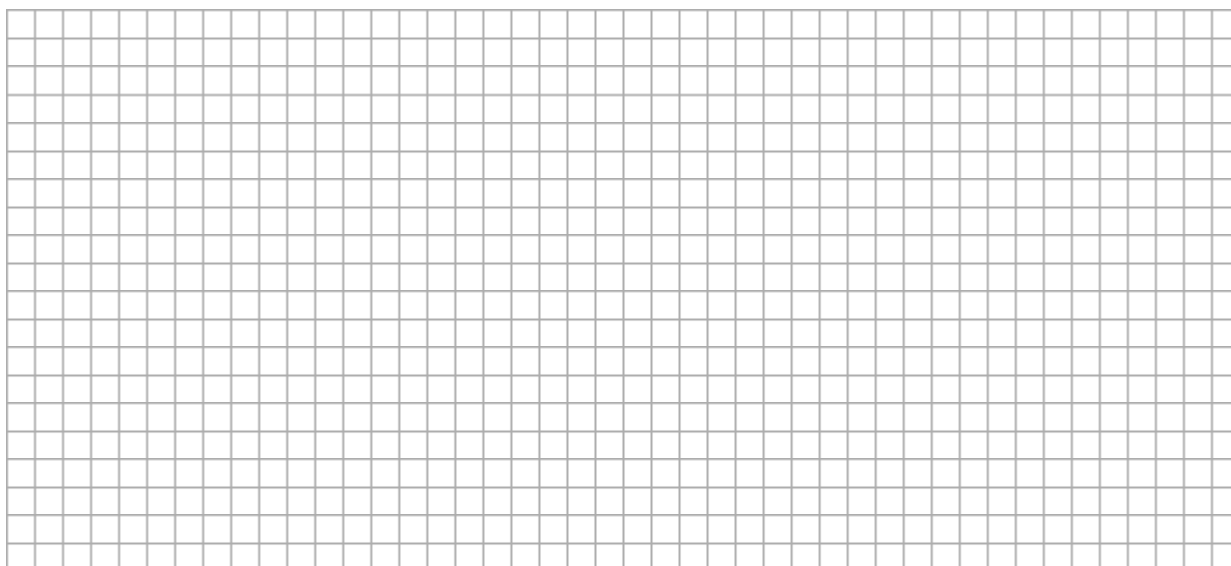
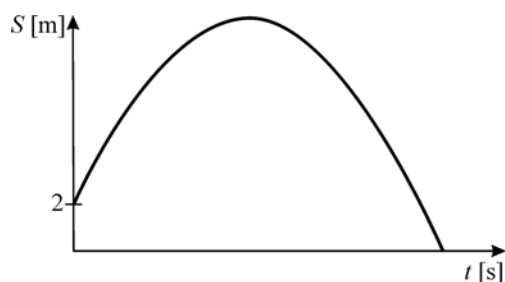
Na rysunku podano wykres funkcji f . Wyznacz jej przedziały monotoniczności, ekstrema oraz naszkicuj wykres funkcji $y = f'(x)$



Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 21 – podobne zadanie na wykładzie 4 na Kursie Rocznym (poziom II)

Zadanie (4 pkt.)

Tor lotu piłki wyrzuconej w górę z wysokości 2 m ilustruje rysunek. Przyjmując, że krzywa na rysunku jest fragmentem paraboli oraz wiedząc, że w trzeciej sekundzie lotu piłka osiągnęła największą wysokość równą 20 m, wyznacz wzór funkcji opisującej zależność między wysokością, na jaką się wzniosła piłka a czasem lotu i określ dziedzinę tej funkcji.

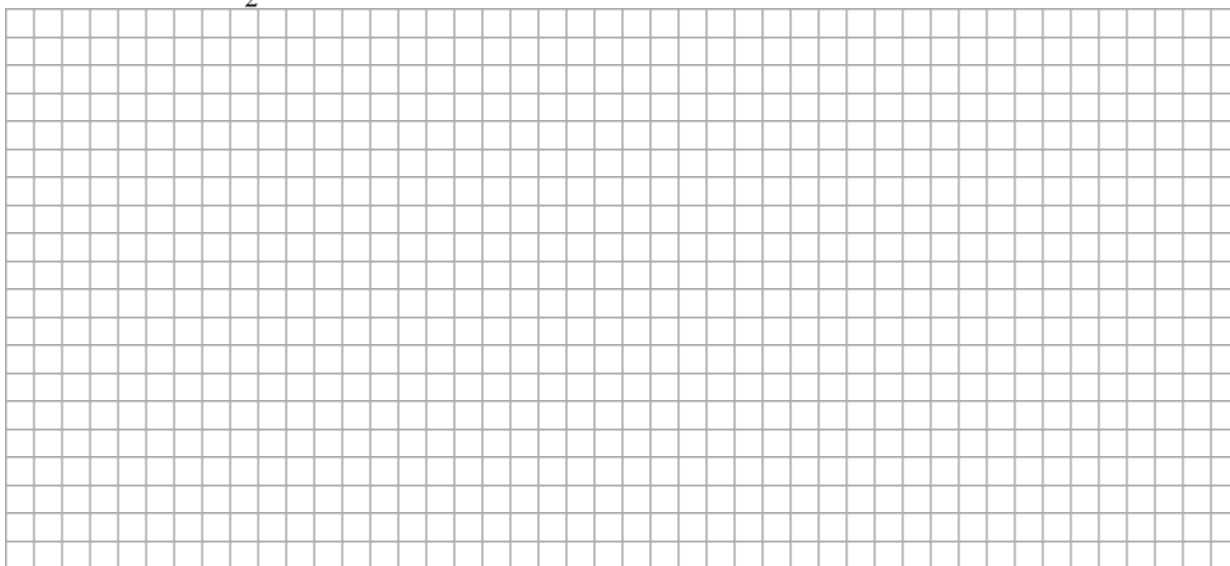


Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 21 – podobne zadanie na wykładzie
15 na Kursie Rocznym (poziom II)

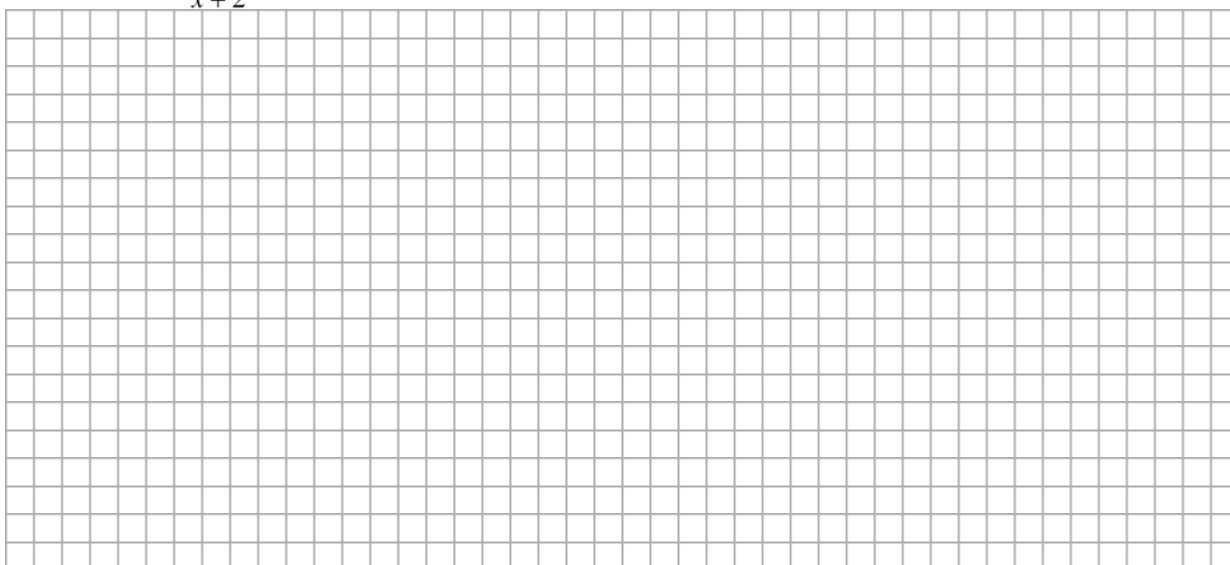
Zadanie (1 pkt.)

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji:

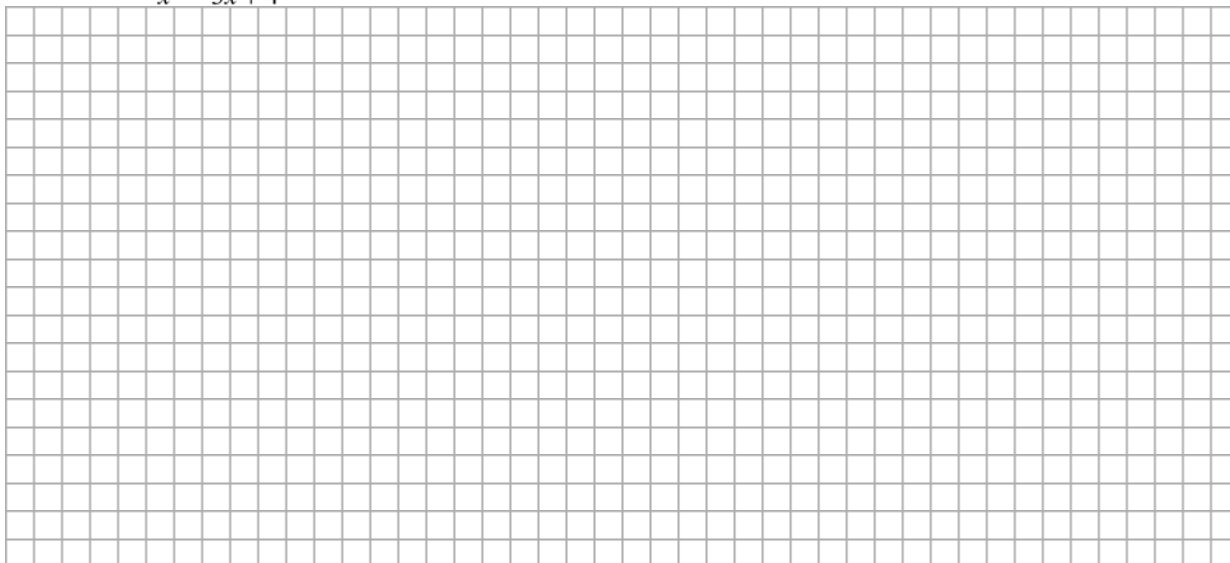
1. $f(x) = -2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 3$



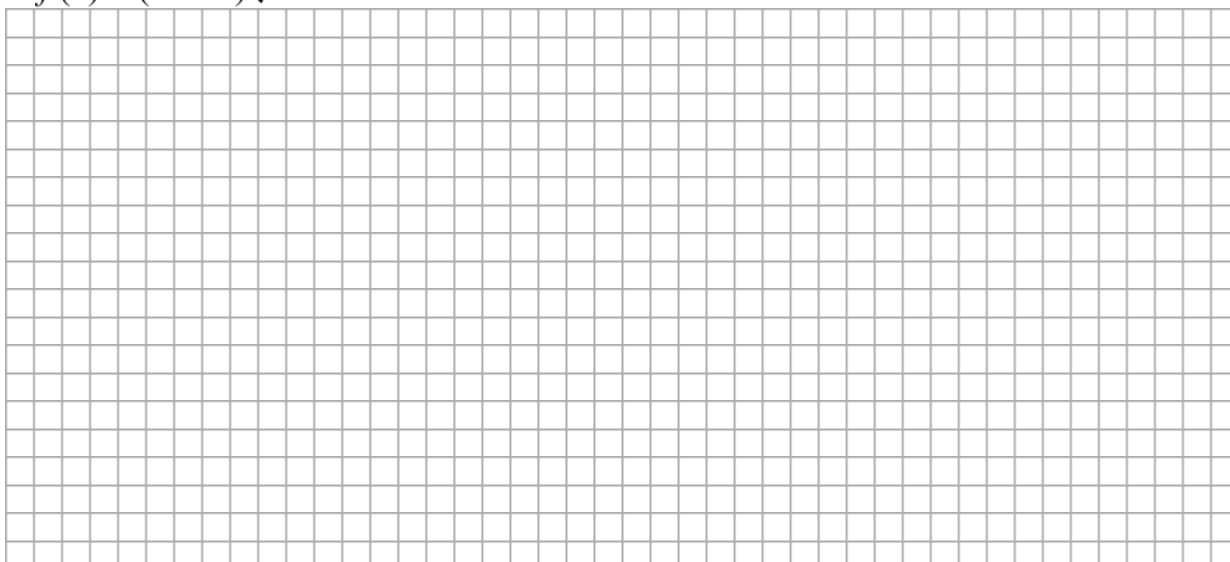
2. $f(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 1}{x + 2}$



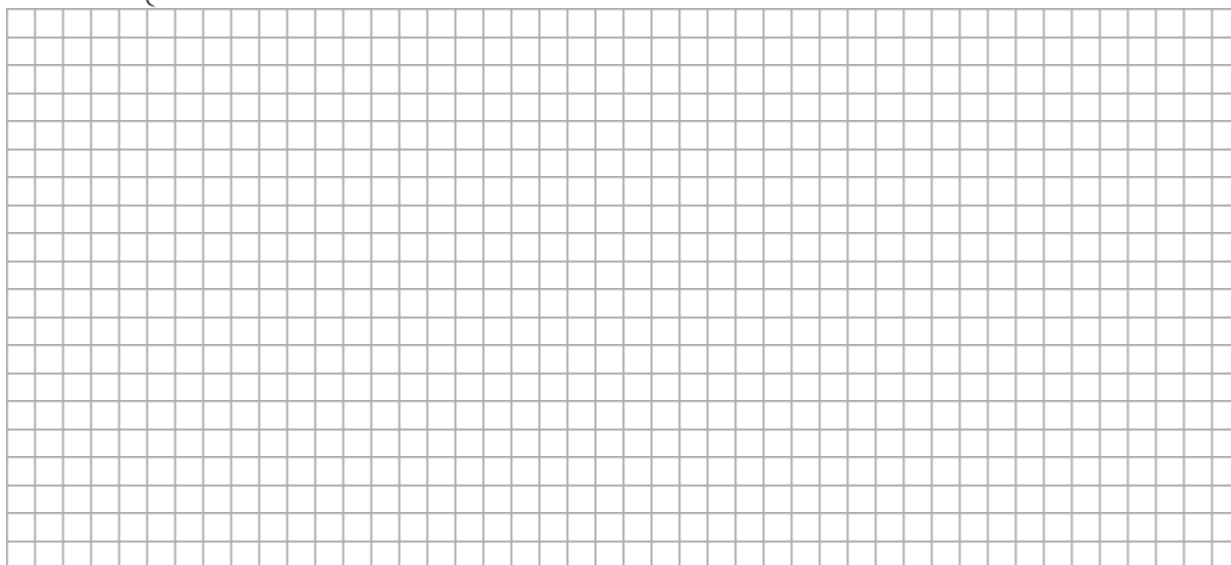
$$3. f(x) = \frac{2-x}{-x^2-3x+4}$$



$$4. f(x) = (3x-4)\sqrt{x}$$



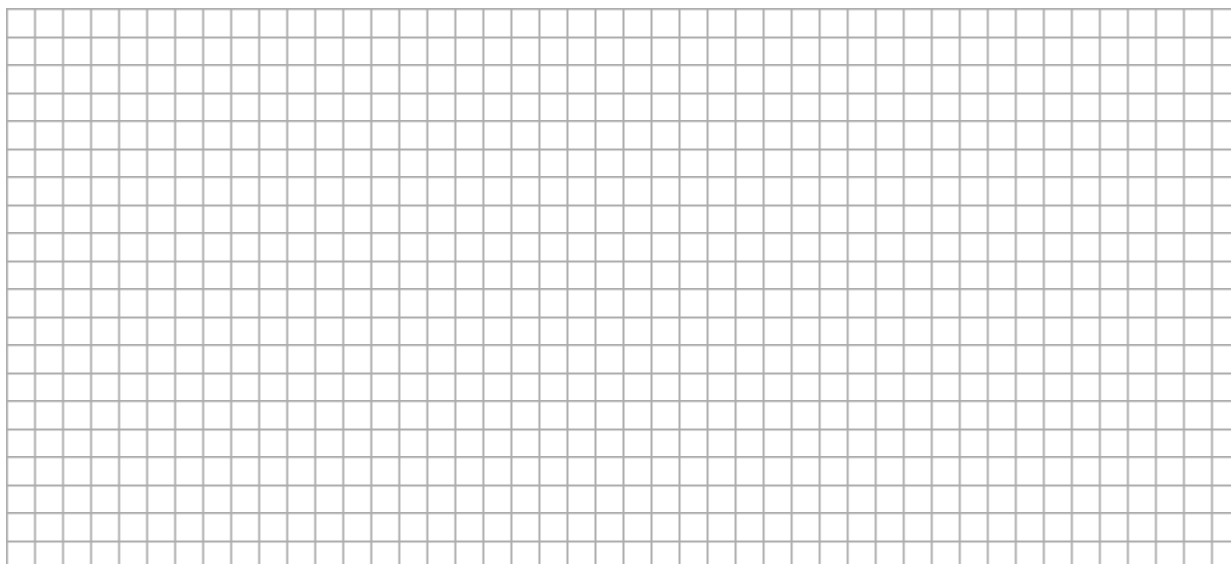
$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+3} & \text{dla } x < -3 \\ \frac{4-x}{x^2+1} & \text{dla } x \geq -3 \end{cases}$$

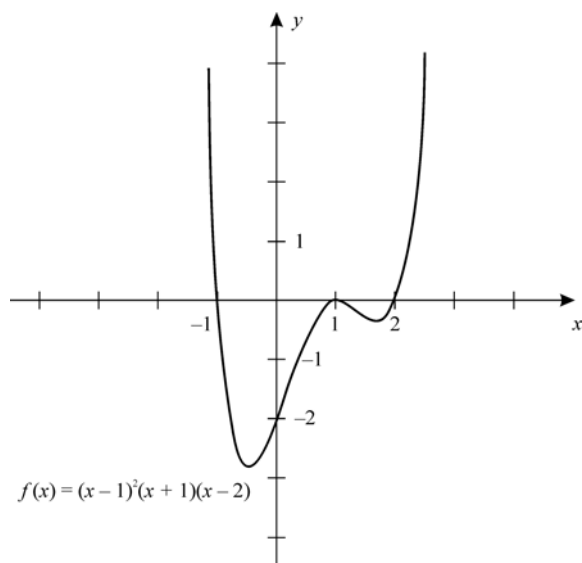


Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadania 21 – podobne zadanie na wykładzie 19 na Kursie Rocznym (poziom I)

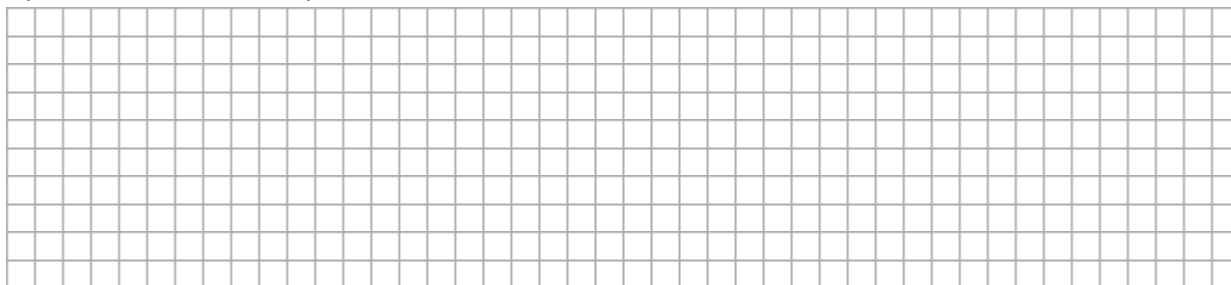
Zadanie (5 pkt.)

Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$. Wyznacz wszystkie te przedziały, w których funkcja f jest rosnąca oraz wyznacz jej ekstrema lokalne.





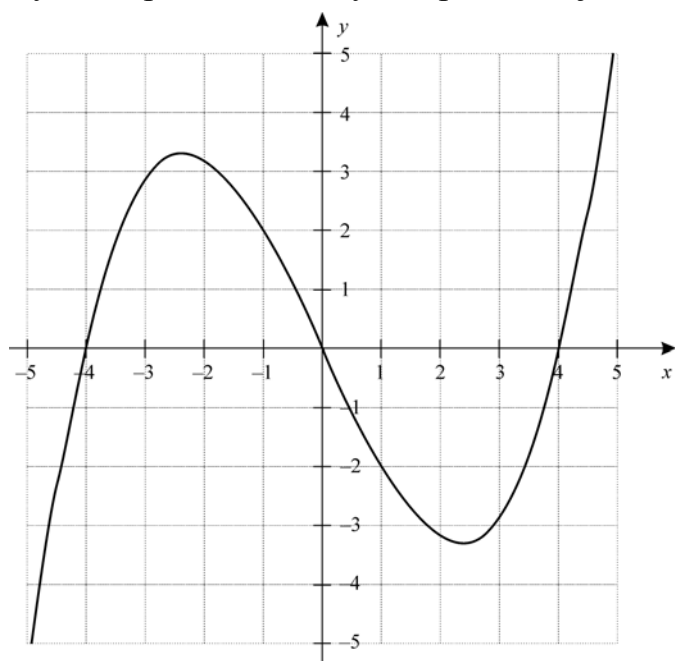
2.



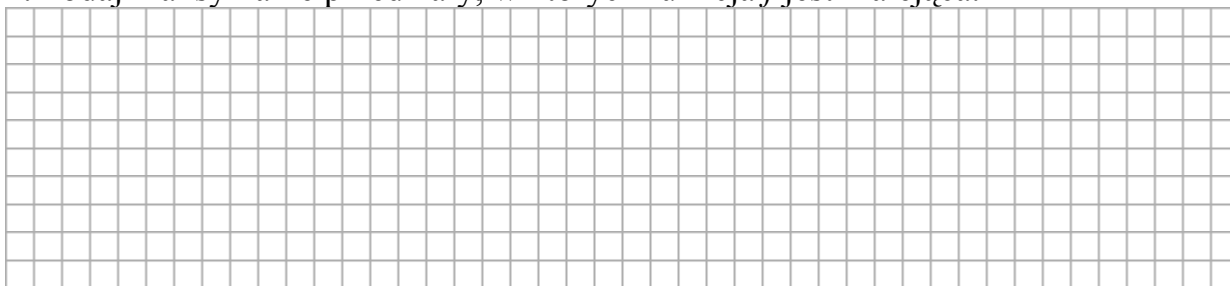
Matura rozszerzona z matematyki 2006, zadanie 21 – podobne zadanie na tescie 13 na Kursie Rocznym

Zadanie (5 pkt.)

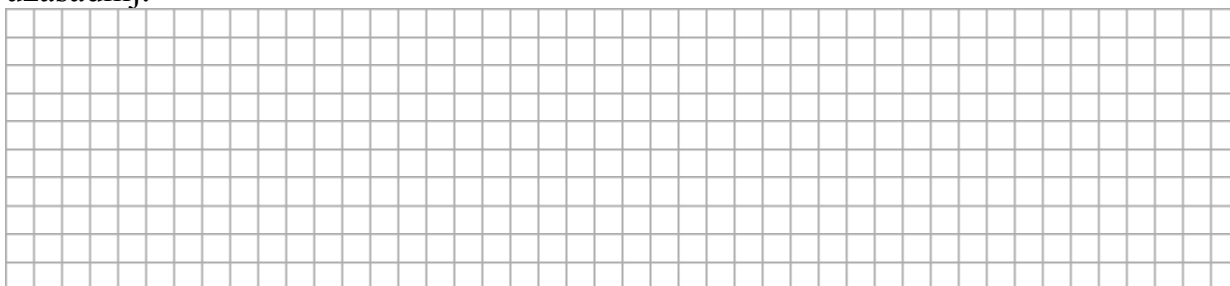
Rysunek przedstawia wykres pochodnej funkcji f .



1. Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.



2. Wyznacz wartość x , dla której funkcja f osiąga maximum lokalne; odpowiedź uzasadnij.



3. Wiedząc, że punkt $A(1,2)$ należy do wykresu funkcji f , napisz równanie stycznej do krzywej f w punkcie A .

